

Ch3 訊號與系統

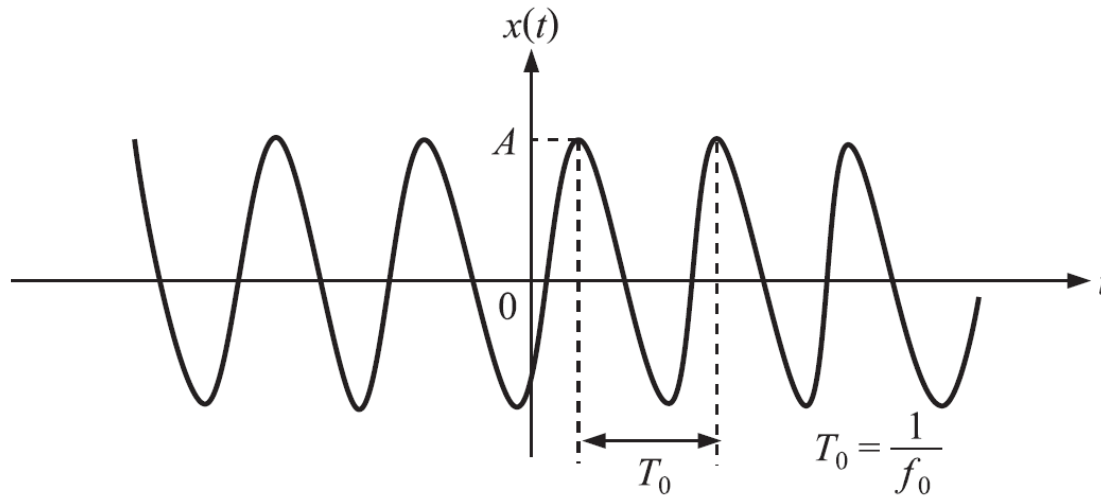


3-1 訊號之描述

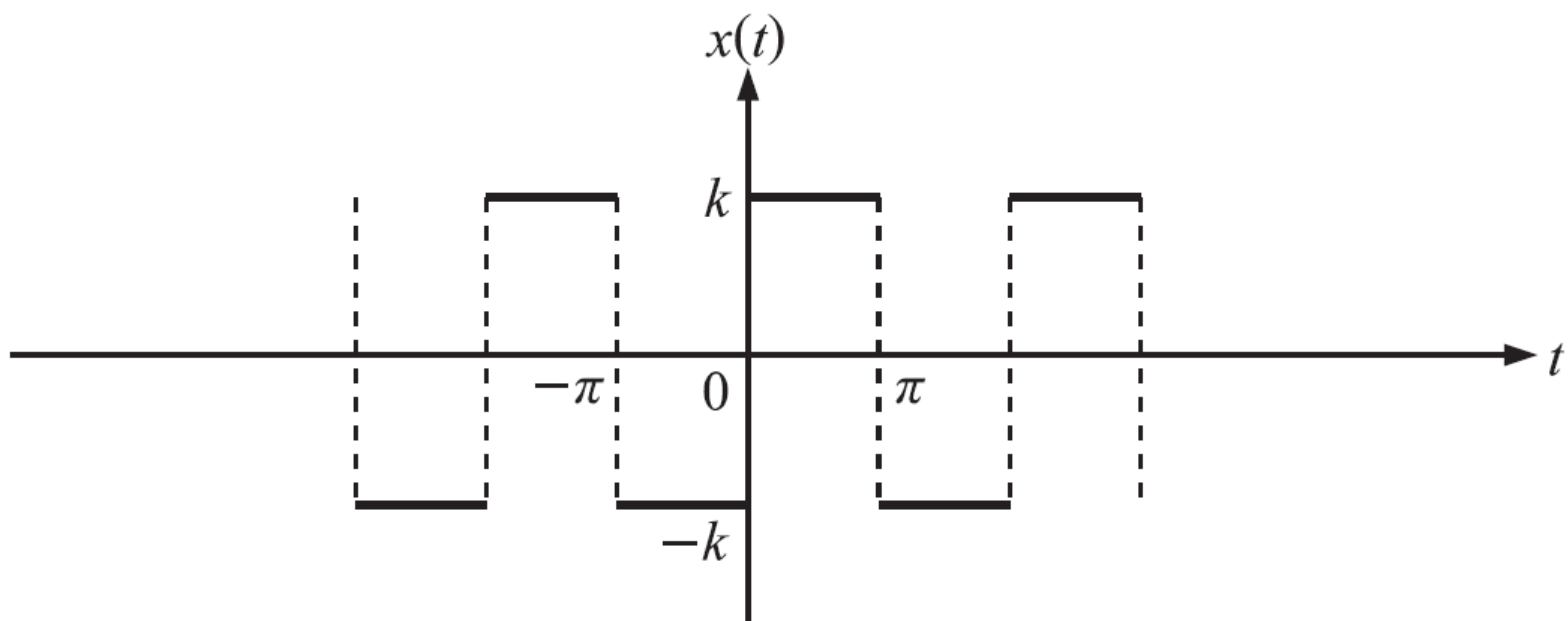
訊號分類

1. 決定性訊號與隨機訊號：

(1) 決定性訊號 (Deterministic Signal)：訊號在任何時刻其函數值是確定的。基本上可用數學函數表示者皆屬於此類，如圖 3-1。



(a) $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$



$$(b) x(t) = \begin{cases} k, & 0 < t < \pi \\ -k, & -\pi < t < 0 \end{cases}, \quad x(t + 2\pi) = x(t)$$

圖 3-1

(2) 隨機訊號 (Random Signal)：訊號在任何時刻無法確定其函數值，如圖 3-2。

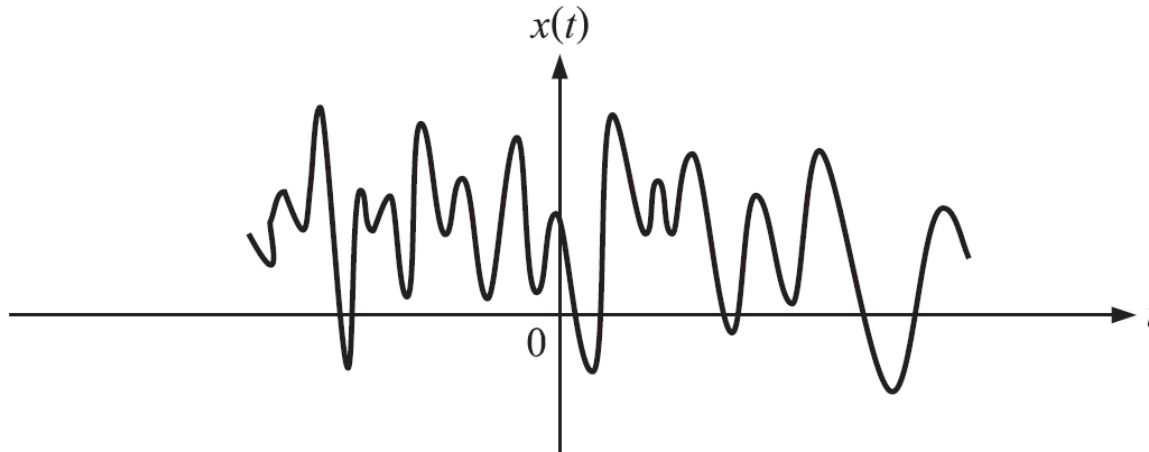


圖 3-2

2. 週期訊號與非週期訊號：

- (1) 週期訊號 (Periodic Signal)：若一訊號 $x(t)$ 滿足 $x(t + T_0) = x(t)$, $T_0 > 0$ 對所有之 t ，則稱 $x(t)$ 為週期 T_0 之**週期訊號**， $f_0 = \frac{1}{T_0}$ 為**頻率** (Frequency)。如果有許多週期函數做線性組合後之週期，則取其最大週期稱為**基本週期** (Fundamental Period)。舉例來說 $x(t) = \sin^3(2t)$ ，可知 $x(t)$ 為週期函數，因為

$$x(t) = \sin^3(2t) = \frac{1}{4}(3 \sin 2t - \sin 6t)$$

其中 $\sin 2t$ 之週期為 π ， $\sin 6t$ 之週期為 $\frac{\pi}{3}$ ，因此 $x(t)$ 之**基本週期**為 π 。

- (2) 非週期訊號 (Aperiodic Signal)：不存在 T_0 之訊號，如隨機訊號都屬於非週期訊號。

3. 能量訊號與功率訊號 (最常用之分類) :

(1) 能量訊號 (Energy Signal) : 先定義一訊號 $x(t)$ 之能量 E 為

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

若 E 存在的話 ($0 < E < \infty$)，就稱 $x(t)$ 為**能量訊號**。實際的計算結果發現：指數型減衰函數、單一方波等都屬於能量訊號，可知大部分的非週期訊號與大部分的決定性訊號也視為是能量訊號。

(2) 功率訊號 (Power Signal) : 先定義一訊號 $x(t)$ 之平均功率 P 為

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

若 P 存在的話 ($0 < P < \infty$)，就稱 $x(t)$ 為**功率訊號**。計算結果發現：**週期訊號一定是功率訊號**，即有週期訊號 $\xrightleftharpoons[\text{不一定}]{\text{一定}}$ 功率訊號。又隨機訊號視為是功率訊號。



一訊號若已經屬於能量訊號，則 E 存在，故其 $P = 0$ ；一訊號若已經屬於功率訊號，則 P 存在，且其 $E \rightarrow \infty$ 。而有些訊號既不是能量訊號，也不是功率訊號。

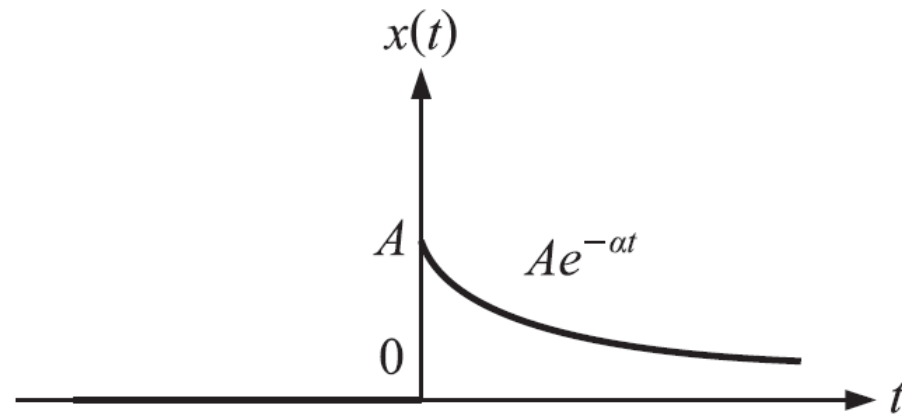


圖 3-3

Let $x(t) = t^{-0.25}$, $t \geq t_0 > 0$ and zero otherwise. Compute the energy and power in $x(t)$, and determine whether $x(t)$ is a energy signal or a power signal.

解 $x(t)$ 之圖形如圖 3-4 :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{\infty} (t^{-0.25})^2 dt \\ &= [2\sqrt{t}]_{t_0}^{\infty} = \text{不存在} \end{aligned}$$

故 $x(t) = t^{-0.25}$, $t \geq t_0 > 0$ 不為能量訊號。再由

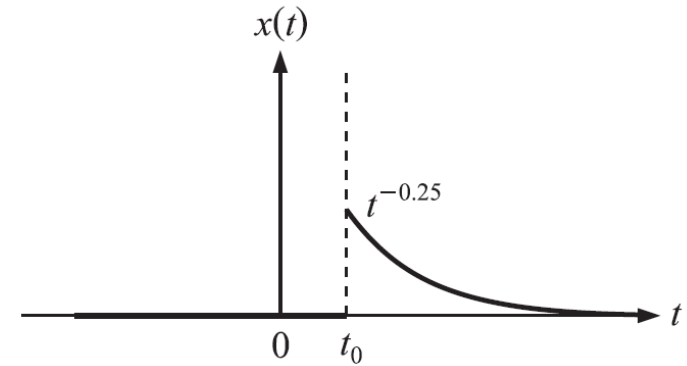


圖 3-4

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0}^T (t^{-0.25})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [2\sqrt{t}]_{t_0}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [2\sqrt{T} - 2\sqrt{t_0}] = 0 \end{aligned}$$

故 $x(t) = t^{-0.25}$, $t \geq t_0 > 0$ 亦不為功率訊號。

訊號基本運算

1. 漲縮 (Stretch and Compression) :

$$y(t) = x(at), \quad \begin{cases} a > 1 : y(t) \text{ 為 } x(t) \text{ 之壓縮} \\ 0 < a < 1 : y(t) \text{ 為 } x(t) \text{ 之伸展} \end{cases}$$

已知 $x(t)$ 如圖 3-5(a) 所示，則 $x(2t)$ (壓縮) 與 $x\left(\frac{1}{2}t\right)$ (伸展) 如圖 3-5(b) 所示。

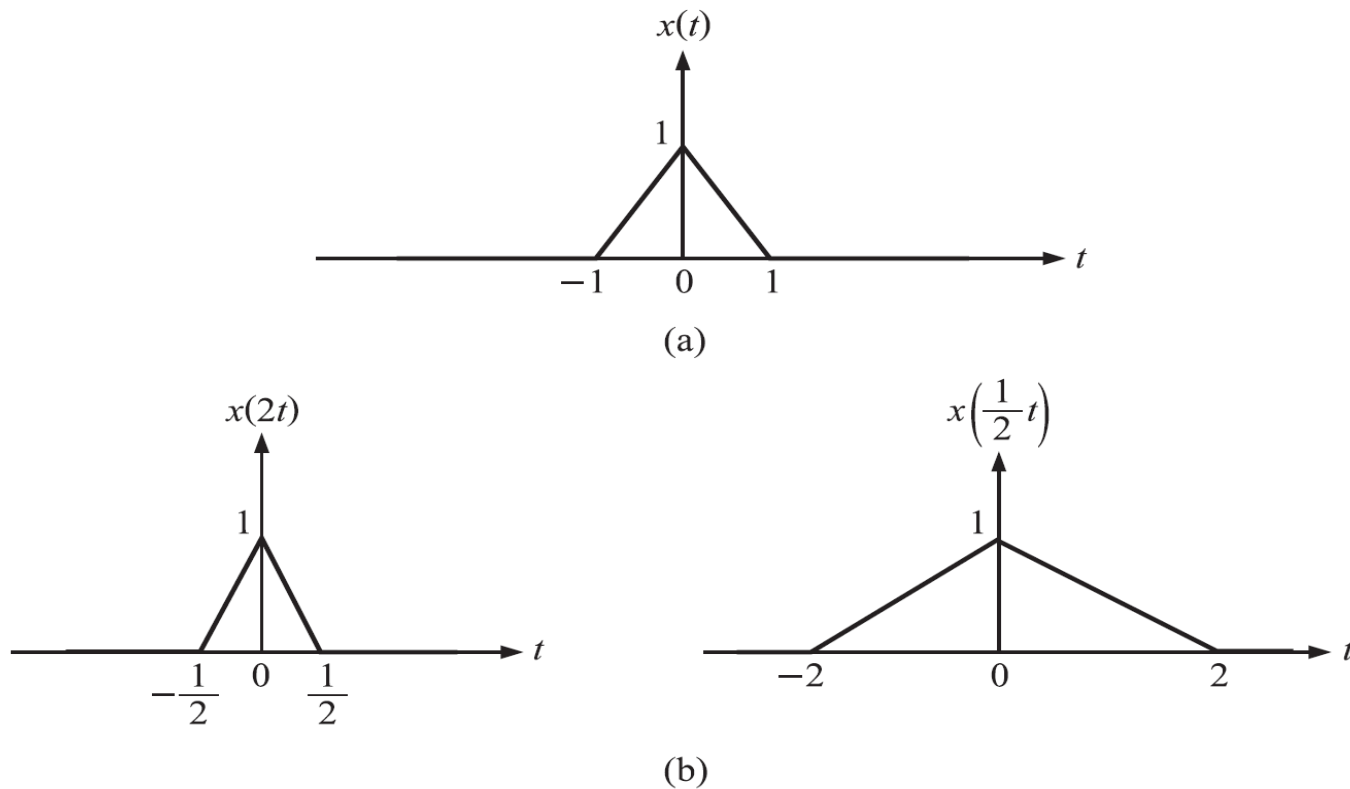
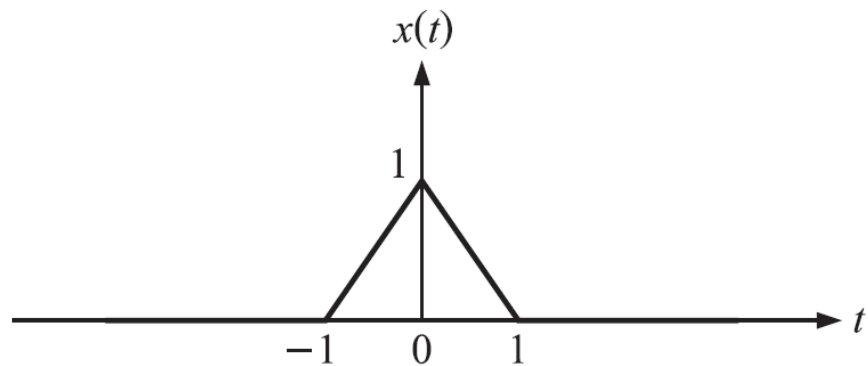


圖 3-5

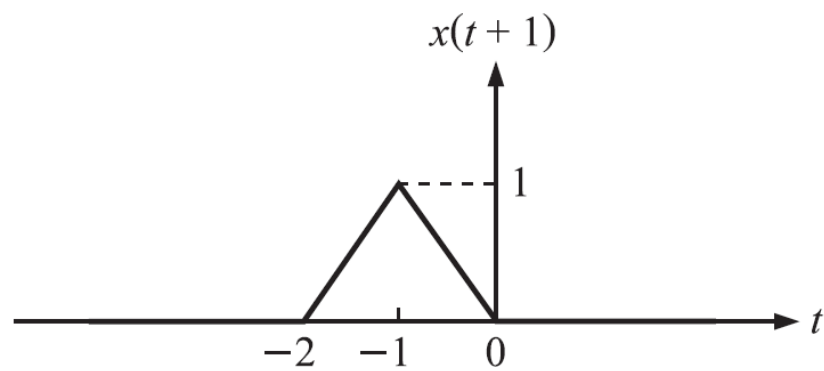
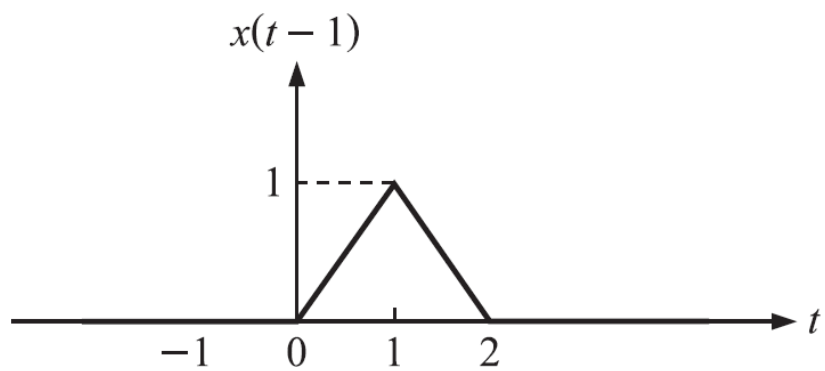
2. 平移 (Shift) :

$$y(t) = x(t - b), \quad \begin{cases} b > 0 : y(t) \text{ 為 } x(t) \text{ 往右移動 } b \\ b < 0 : y(t) \text{ 為 } x(t) \text{ 往左移動 } b \end{cases}$$

已知 $x(t)$ 如圖 3-6(a) 所示，則 $x(t+1)$ (左移一個單位) 與 $x(t-1)$ (右移一個單位) 如圖 3-6(b) 所示。



(a)



(b)

圖 3-6

3. 反射 (Reflection) 或稱鏡射： $y(t) = x(-t)$ ，即以 $t = 0$ 之軸 (俗稱 y 軸) 當鏡子，使 $x(t)$ 之圖形左右互換即得 $y(t)$ 之圖形，如圖 3-7 所示。

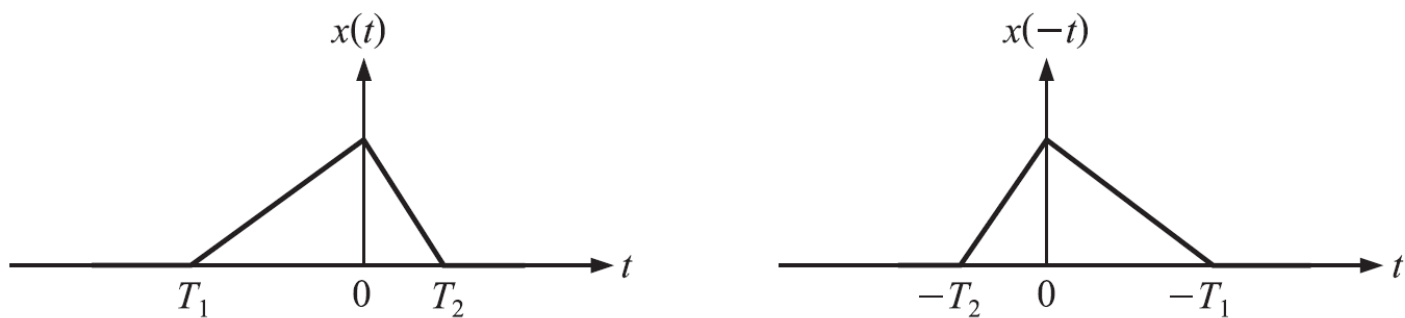


圖 3-7

4. 線性變換 (結合漲縮、平移、反射)

$$y(t) = x(at - b)$$

因為 $x(at - b) = x\left[a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right]$ ，利用以下兩步驟：

- Step1：先畫出 $x(at)$ 。
- Step2：再右移 $\frac{b}{a}$ 。

已知 $x(t)$ 如圖 3-8 所示。

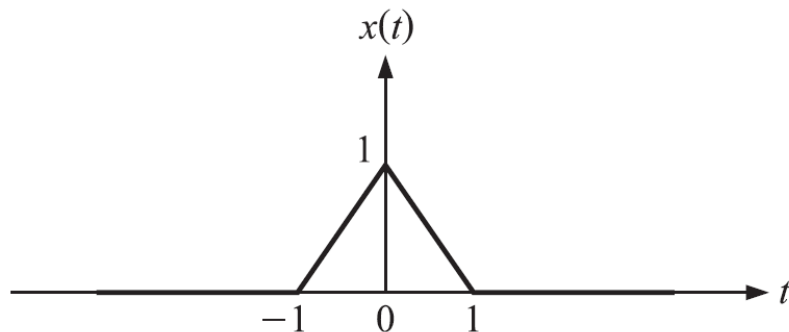


圖 3-8

(1) 欲得到 $y(t) = x(2t - 3)$ ，因 $x(2t - 3) = x\left[2\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$ ，則見圖 3-9。

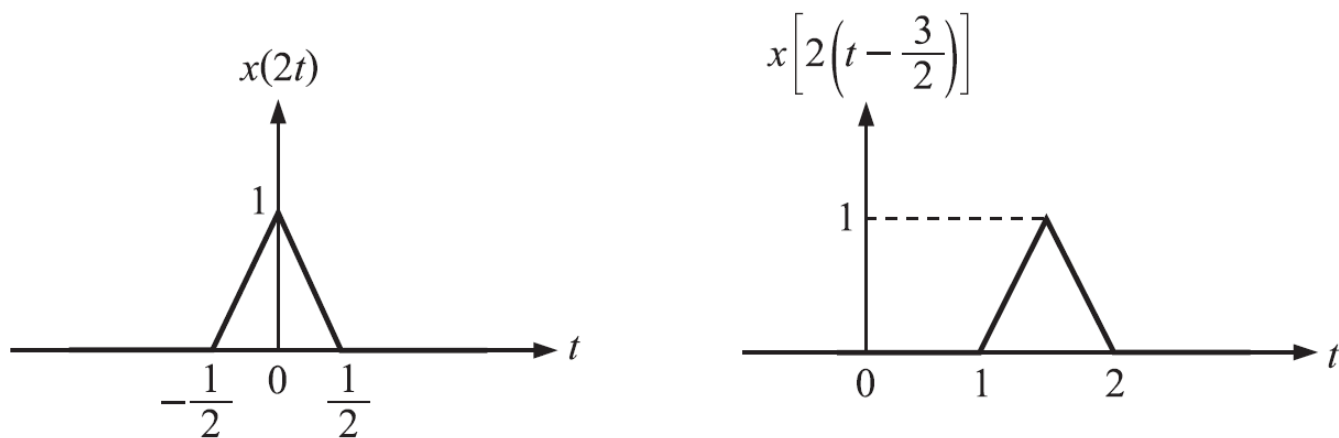


圖 3-9

(2) 欲得到 $y(t) = x(-2t - 1)$ ，因 $x(-2t - 1) = x\left[-2\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]$ ，則見圖 3-10。

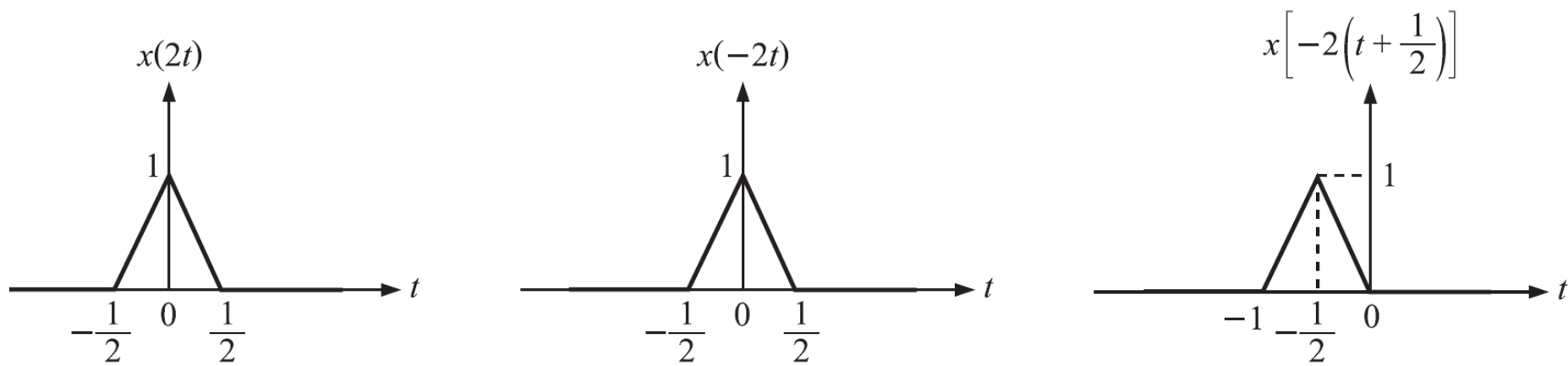


圖 3-10

Plot $x(t - 2)$ and $x(-t + 1)$ as functions of time if the signal $x(t)$ is defined as

$$x(t) = \begin{cases} t + 2, & -2 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq 1 \\ 2 + 2 \cos(0.5\pi t), & 1 < t \leq 3 \\ 1, & 3 < t \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

解 $x(t)$ 之圖形如圖 3-11。

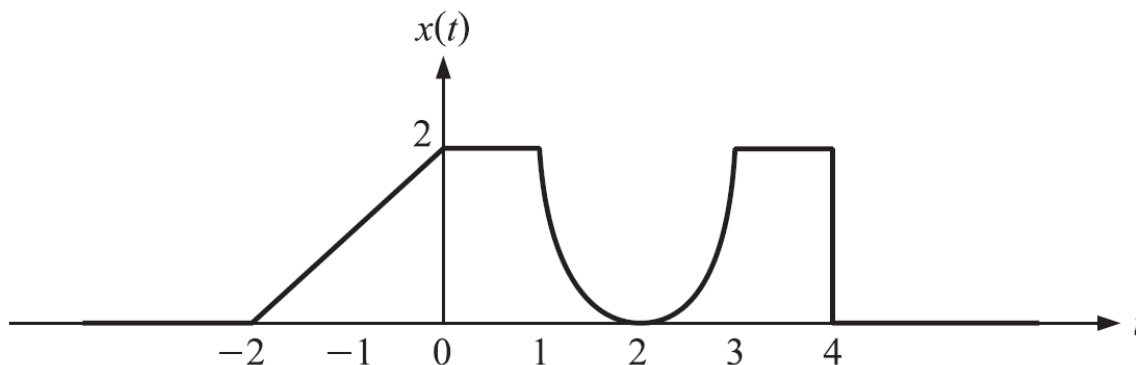


圖 3-11

則 $x(t-2)$ 之圖形如圖 3-12。

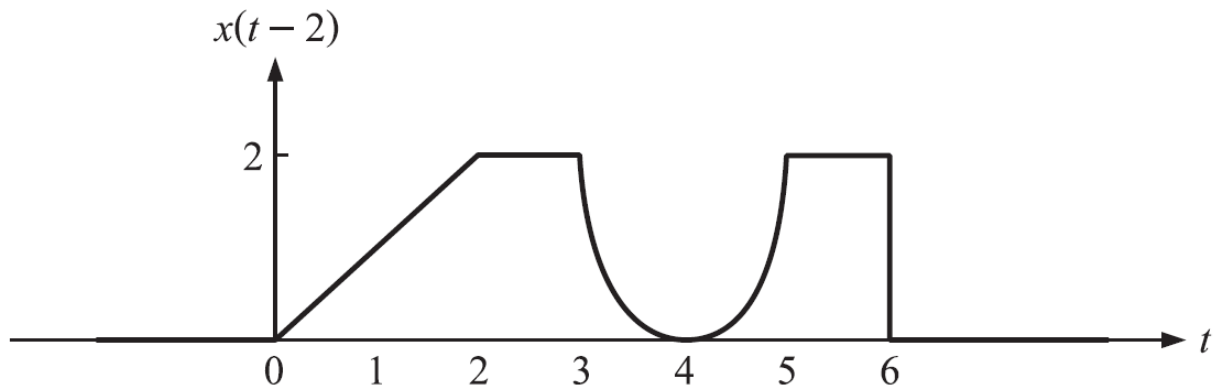


圖 3-12

則 $x(-t+1)$ 之圖形如圖 3-13。

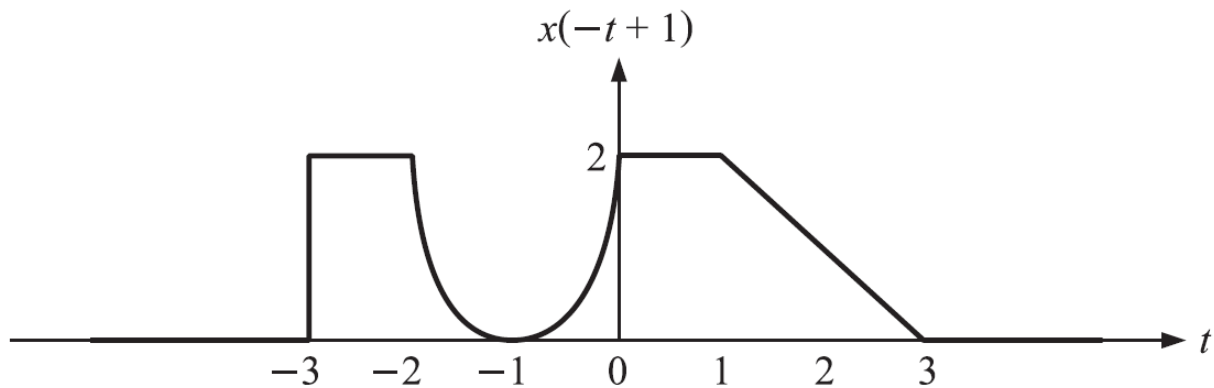


圖 3-13

常用訊號數學表示法

1. 弦式波函數 (Sinusoidal Wave Function) :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

表示週期 $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 、相位 ϕ 之弦式波。

2. 方波 (Rectangular Pulse) :

$$(1) x(t) = \text{rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

如圖 3-14 所示。

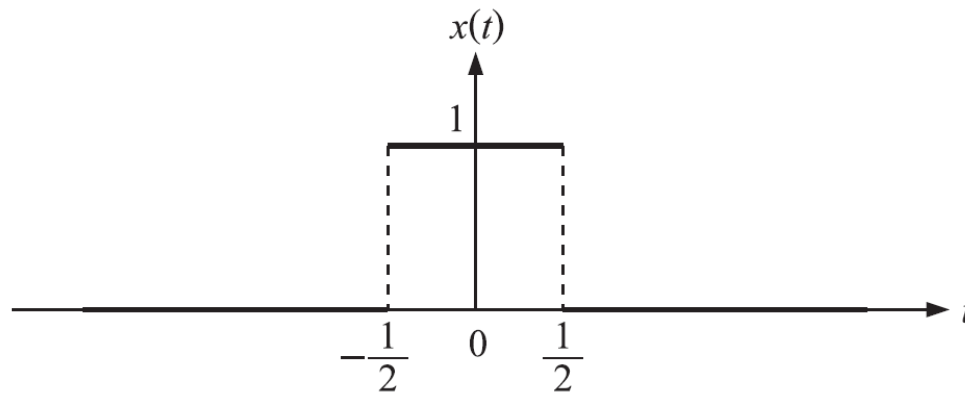


圖 3-14

(2) $x(t) = A\text{rect}\left(\frac{t-a}{d}\right) = A\Pi\left(\frac{t-a}{d}\right) = \begin{cases} A, & |t-a| < \frac{d}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$, 如圖 3-15 。

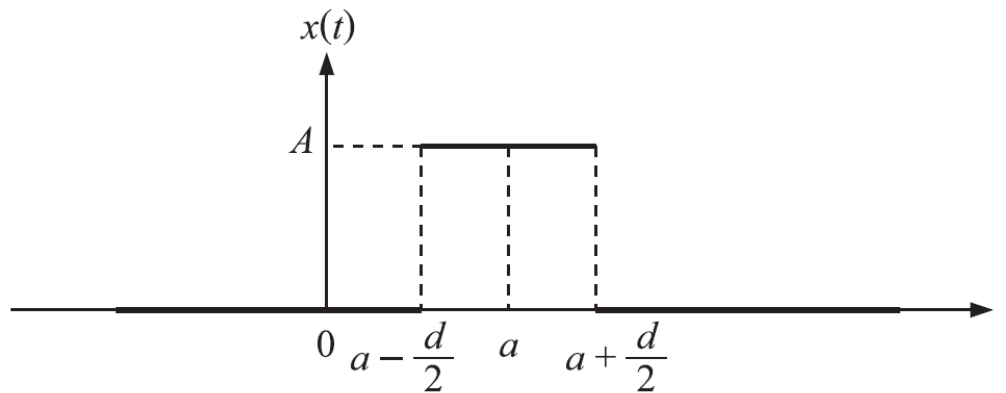


圖 3-15

3. 三角波 (Triangular Signal) : 定義 :

$$\text{tri}(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x(t) = A\text{tri}\left(\frac{t-a}{d}\right) = A\Lambda\left(\frac{t-a}{d}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t-a|}{d}\right), & |t-a| < d \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

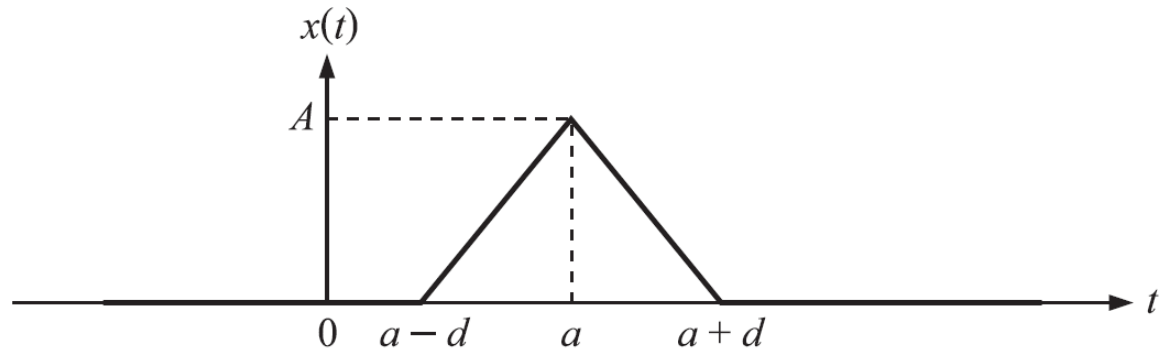


圖 3-16

4. 指數函數 (Exponential Function) :

(1) 單向指數函數 $x(t) = \begin{cases} Ae^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, 如圖 3-17 。

(2) 雙向指數函數 $x(t) = Ae^{-a|t|}$, 如圖 3-18 。

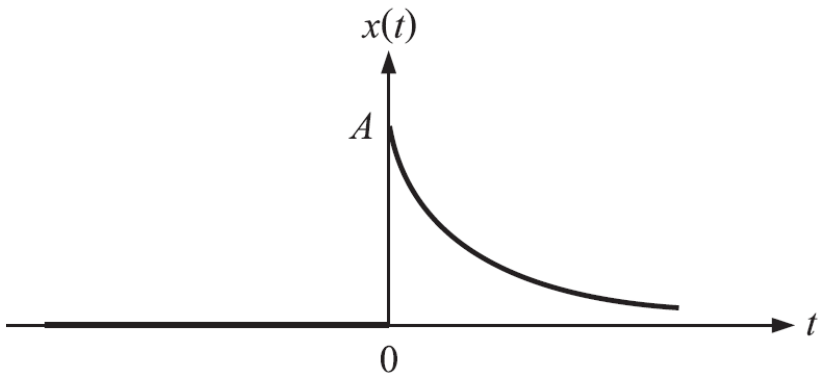


圖 3-17

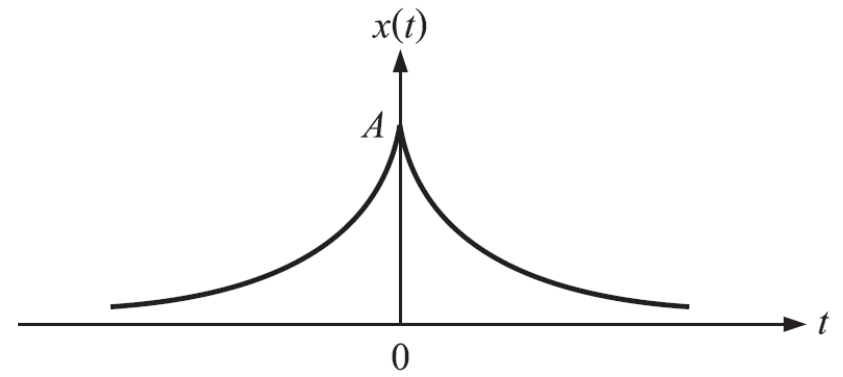


圖 3-18

5. 步階函數 (Unit Step Function) :

$$x(t) = Au(t - a) = \begin{cases} A, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \quad (\text{如圖 3-19})$$

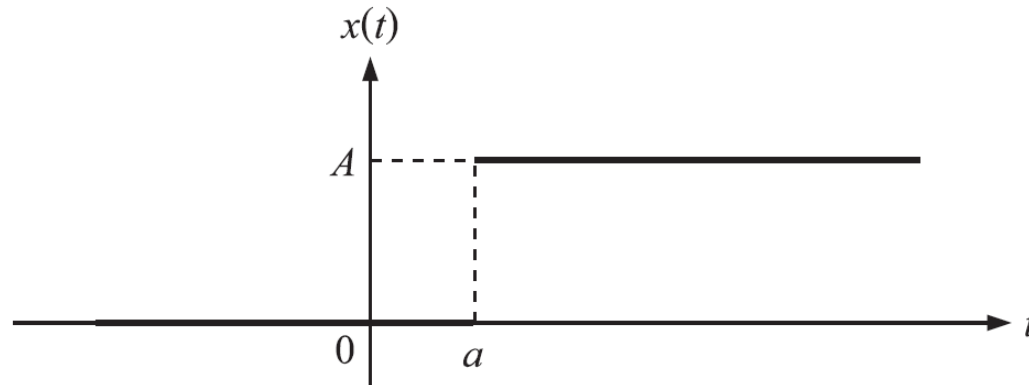


圖 3-19

6. 單位脈衝函數 (Unit Impulse Function) :

$$x(t) = \delta(t - a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases} \quad (\text{其性質在 3-2 節探討, 如圖 3-20})$$

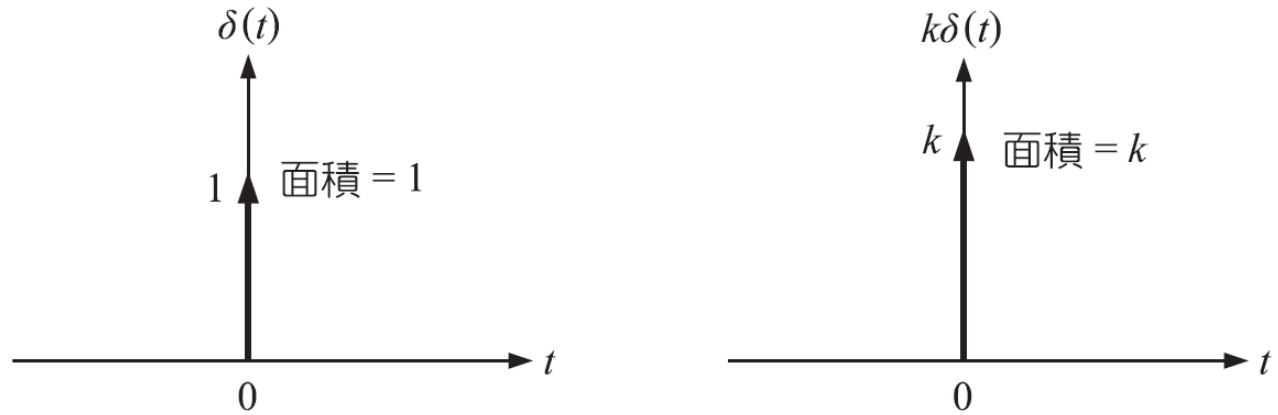


圖 3-20

7. 符號函數 (Sign Function) : Sign 讀作 “signum” 。

$$x(t) = A\text{sgn}(t - a) = \begin{cases} A, & t > a \\ -A, & t < a \end{cases}$$

且由圖 3-21 可知 $\frac{d}{dt}[\text{sgn}(t)] = 2\delta(t)$ 。當 $a = 0$ 時， $A\text{sgn}(t)$ 為奇函數。

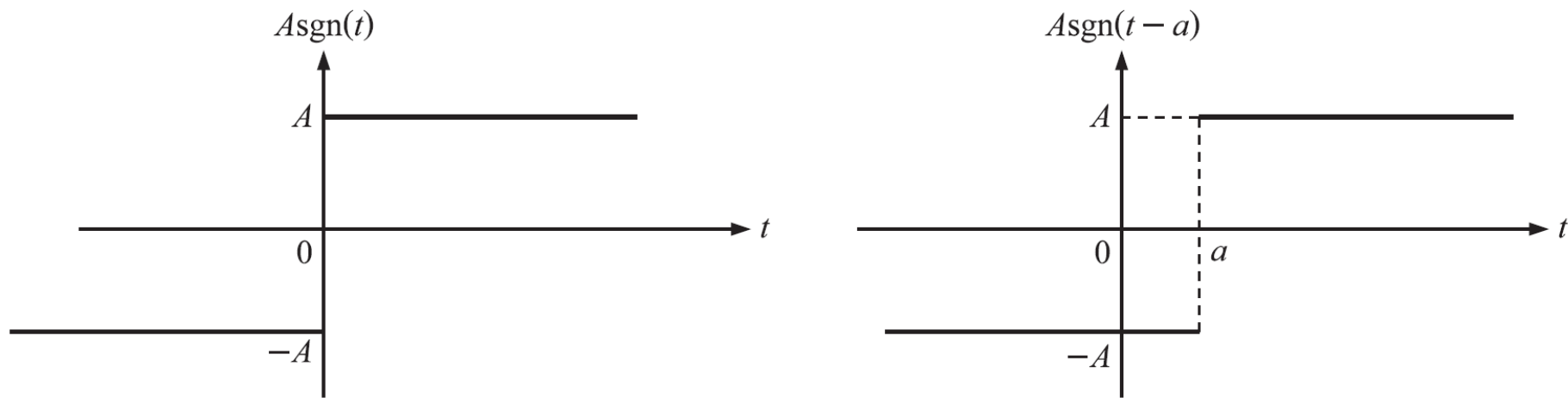


圖 3-21

8. Sinc 函數 (Sinc Function) :

$$x(t) = A \operatorname{sinc}(t) = A \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (\text{如圖 3-22})$$

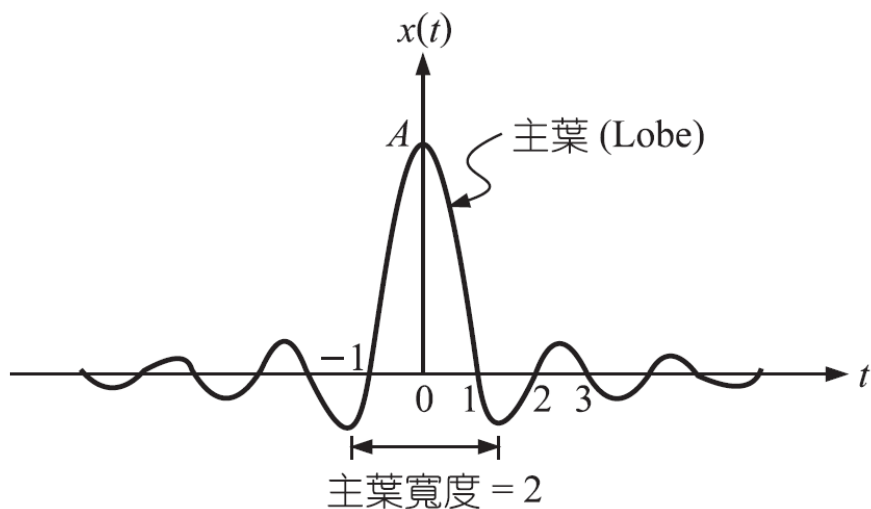


圖 3-22

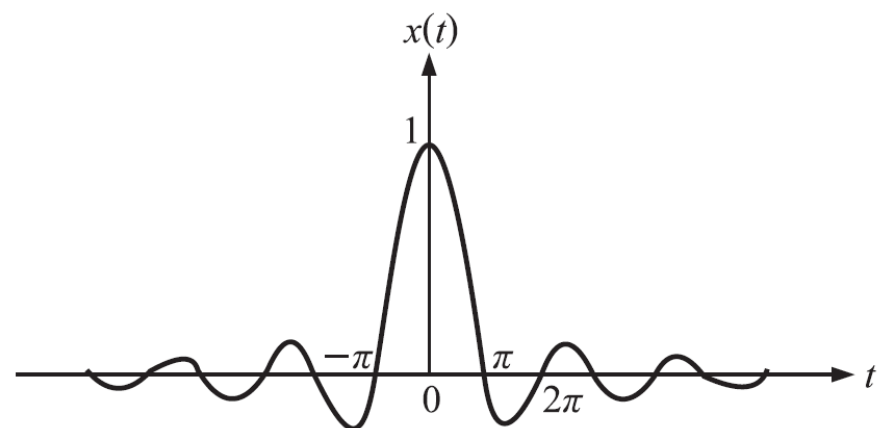


圖 3-23

四、相量 (Phasor) 之表示

通訊理論中常見的週期性訊號如下：

$$\tilde{x}(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}, \quad \tilde{x} \in C$$

一般將 $Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ 稱為**相量 (Phasor)**，將此相量取其實部即可得弦式波 $A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ ：

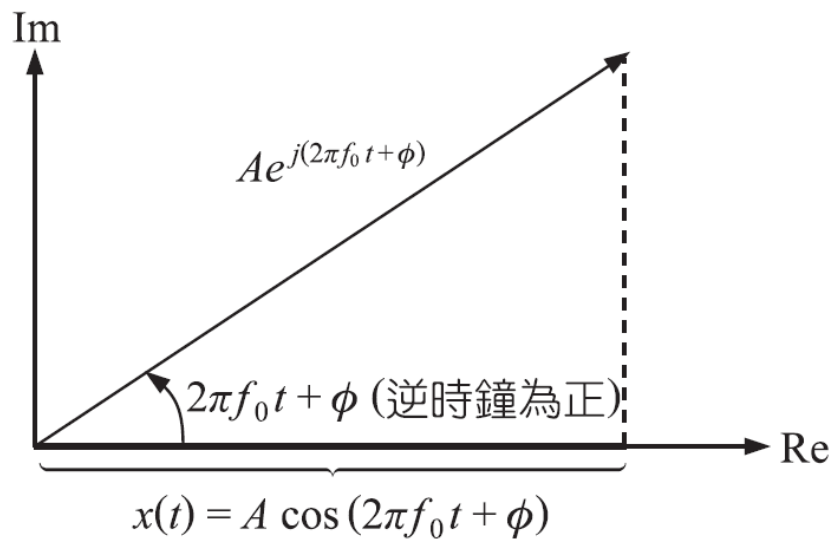
$$x(t) = \text{Re}\{Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}\} = A \cos(2\pi f_0 t + \phi), \quad x(t) \in R \quad (3-1)$$

亦可利用 Euler 恆等式得

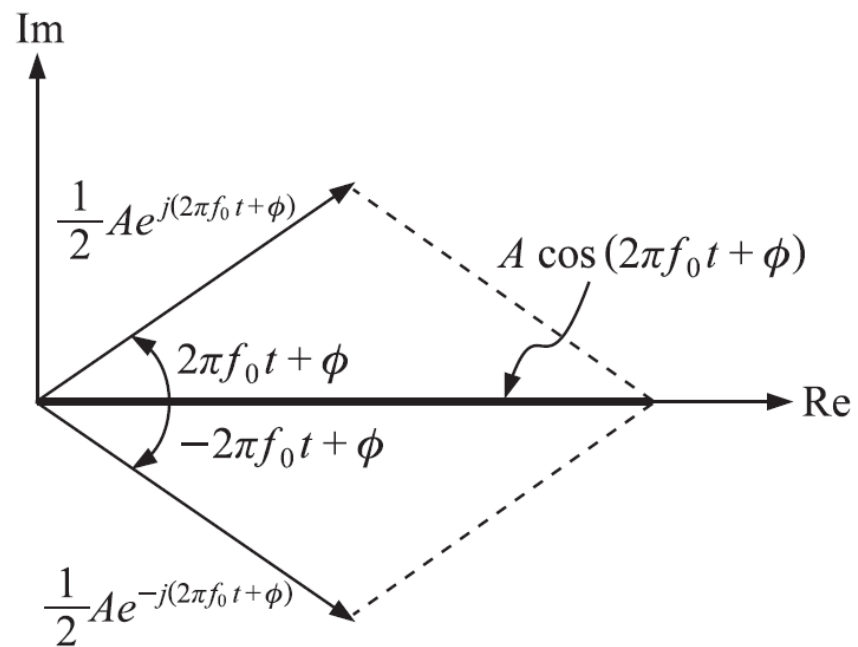
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{1}{2}\tilde{x}(t) + \frac{1}{2}\tilde{x}^*(t) = \frac{1}{2}[Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + Ae^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}]$$

共軛
↓

圖 3-24 即為此兩種表示法。



(a) 投影法



(b) 向量合成法：虛部已自動清除

圖 3-24

 **例題 3-4**
EXAMPLE

將 $x(t) = 5 - 6 \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin(100\pi t)$ 以相量表示之。

解 相量之表示慣例為：振幅須取正，且 $\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$ ，故

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 - 6 \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin(100\pi t) \\ &= 5 \cos(2\pi 0t) + 6 \cos\left(40\pi t + \pi - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5 \cos(2\pi 0t) + 6 \cos\left(2\pi 20t + \frac{2}{3}\pi\right) + 4 \cos\left(2\pi 50t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

單邊 (Single-sided) 頻譜為僅含正頻率的部分，如圖 3-25 所示。

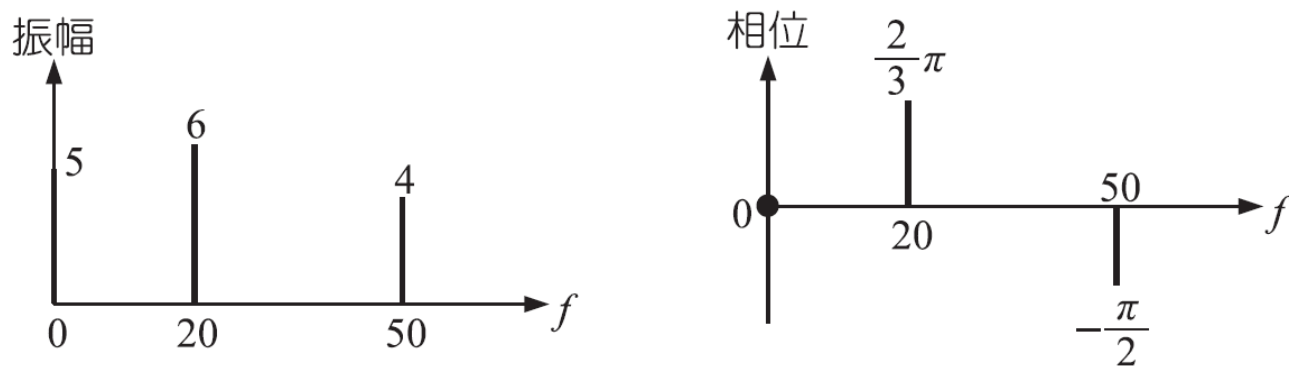


圖 3-25

又

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 5 \cos(2\pi 0t) + 6 \cos\left(2\pi 20t + \frac{2}{3}\pi\right) + 4 \cos\left(2\pi 50t - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 5e^{j0t} + 3\left[e^{j\left(2\pi 20t + \frac{2}{3}\pi\right)} + e^{-j\left(2\pi 20t + \frac{2}{3}\pi\right)}\right] + 2\left[e^{j\left(2\pi 50t - \frac{1}{2}\pi\right)} + e^{-j\left(2\pi 50t - \frac{1}{2}\pi\right)}\right]
 \end{aligned}$$

雙邊 (Double-sided) 頻譜為含正、負頻率，如圖 3-26 所示。

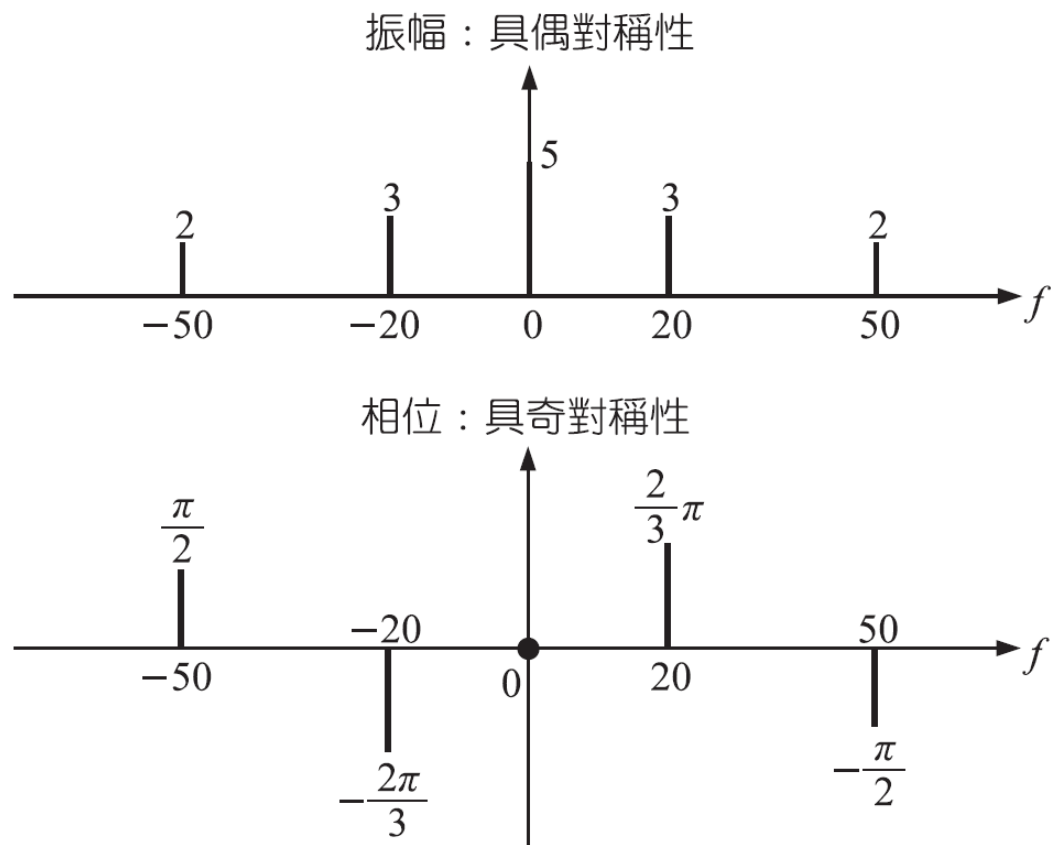


圖 3-26

1. 欲求單邊頻譜，須將 $x(t)$ 以 cosine 表示之。
2. 欲求雙邊頻譜，須將 $x(t)$ 以指數函數表示之。

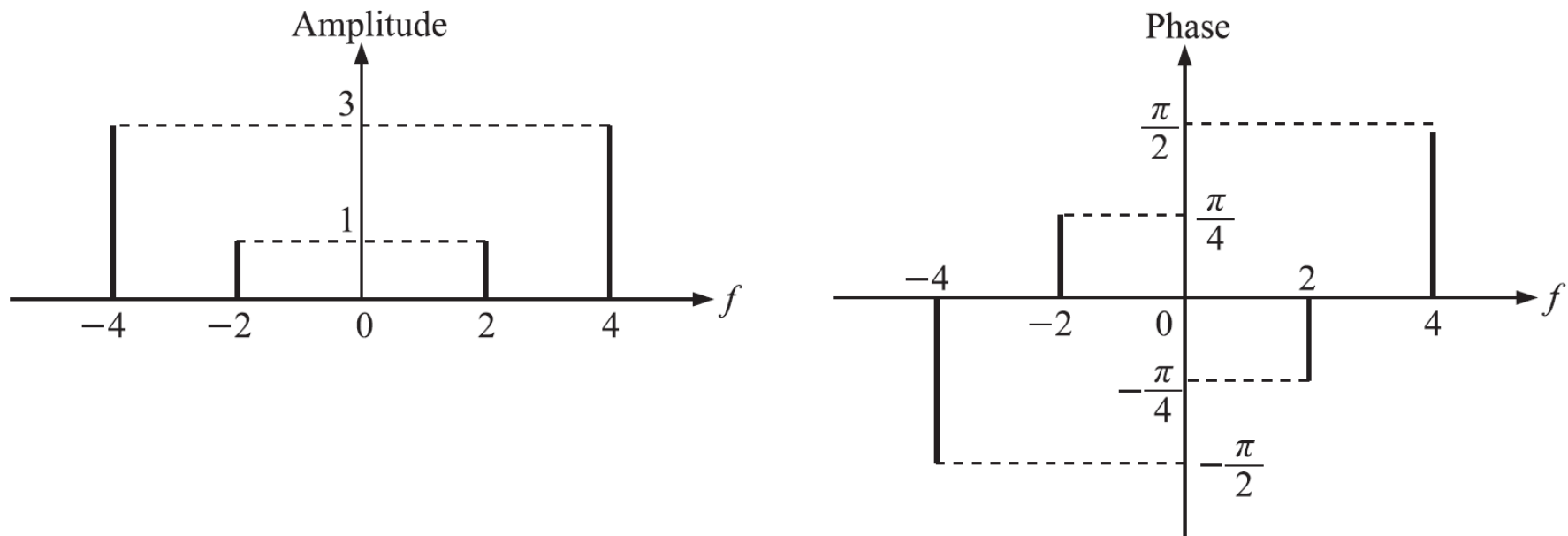


圖 3-27

例題 3-6
EXAMPLE

Sketch each of the following periodic waveforms and compute their average powers.

$$(1) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-6n}{3}\right) \quad (2) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-5n}{2}\right) \quad (3) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-3n}{2}\right)u(t-3n)$$

解 (1) 如圖 3-28。

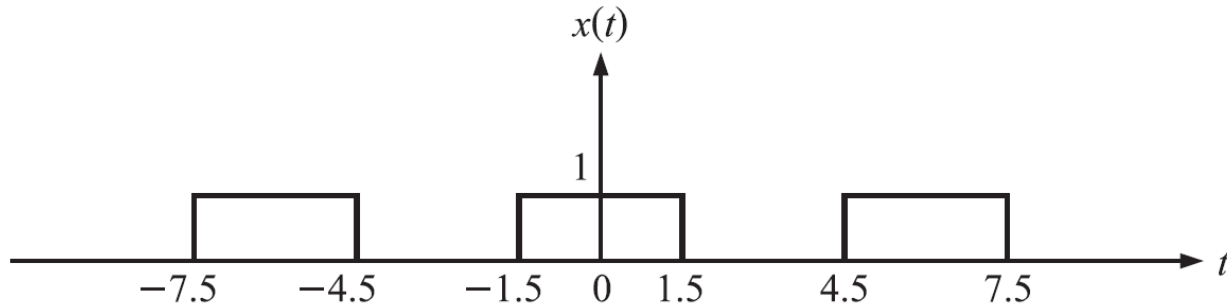


圖 3-28

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{6} \left[\int_{-1.5}^{1.5} |x(t)|^2 dt + \int_{1.5}^{4.5} |x(t)|^2 dt \right] = \frac{1}{6} [3 + 0] = \frac{1}{2}$$

(2) 如圖 3-29。

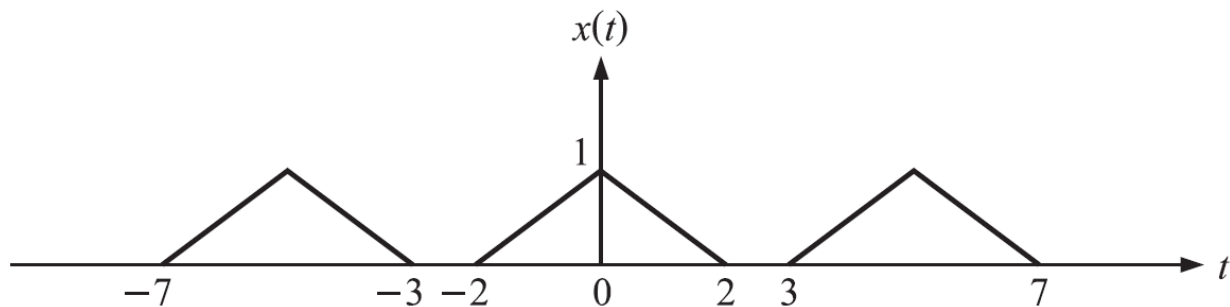


圖 3-29

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}(t+2) \right]^2 dt + \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(-t+2) \right]^2 dt \right\} = \frac{4}{15}$$

(3) 如圖 3-30。

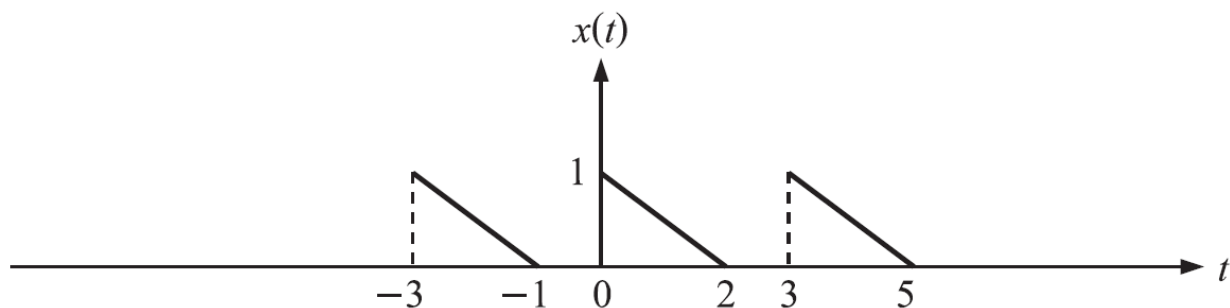


圖 3-30

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{3} \left\{ \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(-t+2) \right]^2 dt + 0 \right\} = \frac{2}{9}$$

3-2 Dirac Delta 函數

Dirac Delta 訊號 $\delta(t - a)$ 如圖 3-31 所示。

$$\begin{aligned}\delta(t - a) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [u(t - a) - u(t - a - \varepsilon)] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & a \leq t \leq a + \varepsilon \\ 0, & \text{其餘值} \end{cases}\end{aligned}$$

此一訊號的特色是：當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，其訊號的大小會成爲無限大，但是其面積 (即作用量) 恆等於 1。爲了區別起見，特將 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時之訊號記爲 $\delta(t - a)$ ，稱爲**單位脈衝函數** (Unit Impulse Function)，又稱爲 Dirac 函數或 Delta 函數，綜合其性質如下：

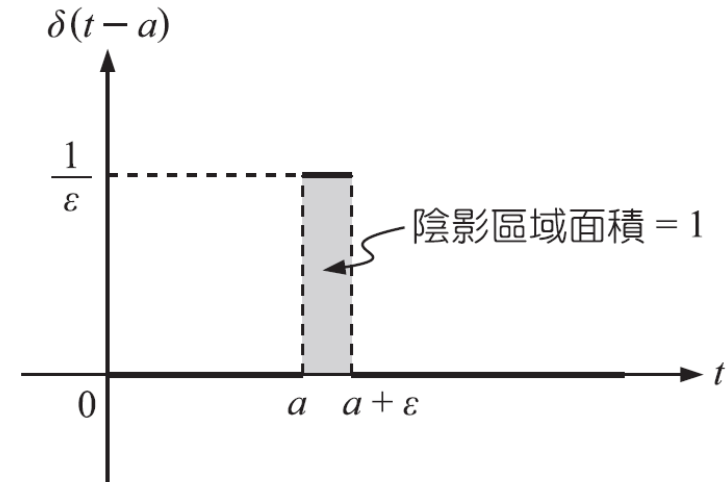


圖 3-31

1. $\delta(t - a) = \frac{du(t - a)}{dt}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - a) dt = x(a)$ ，稱作「過濾性質」(Filter Property)。

離散情況之表示式： $x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - k]$ 。

3. $\int_b^c x(t)\delta(t - a) dt = \begin{cases} x(a), & b \leq a \leq c \\ 0, & a < b \text{ 或 } a > c \end{cases}$

4. $\delta(t - a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1$

5. $x(t)\delta(t - a) = x(a)\delta(t - a)$ (第二過濾性質)

6. $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

7. $\delta(-t) = \delta(t)$ ，即 $\delta(t)$ 視為偶函數。

8. 褶積 (Convolution)：

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

如圖 3-32。離散情況之褶積表示式：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

當一個系統之輸入為 $\delta(t)$ 時，則其輸出 $h(t)$ 稱為脈衝響應函數 (Impulse Response Function)。

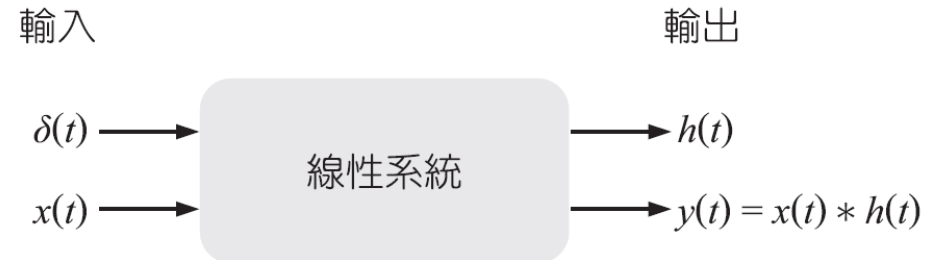


圖 3-32



例題 3-7
EXAMPLE

已知 $x(t) = (t - 2)^2$ ，求：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - 3) dt = ?$

(2) $x(t)\delta(t - 3) = ?$

(3) $x(t) * \delta(t - 3) = ?$

(4) $x(t) * \delta\left(\frac{t}{2}\right) = ?$

解 (1) 由過濾性質知 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - 3) dt = (t - 2)^2 \Big|_{t=3} = 1$ 。

(2) 由第二過濾性質知 $x(t)\delta(t - 3) = (t - 2)^2 \Big|_{t=3} \delta(t - 3) = \delta(t - 3)$ 。

(3) 利用線性系統之性質知 $x(t) * \delta(t - 3) = (t - 3 - 2)^2 = (t - 5)^2$ 。

(4) 先計算 $\delta\left(\frac{t}{2}\right) = 2\delta(t)$ ，再利用線性系統之性質知 $x(t) * \delta\left(\frac{t}{2}\right) = 2(t - 2)^2$ 。

3-3 連續時間之Fourier分析

一、週期函數之Fourier級數：

1. 週期為 T_0 之實數週期性訊號 $x(t)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_0}$$

其中 $f_0 = \frac{1}{T_0}$ 為基本頻率，

$\omega_0 = 2\pi f_0$ 為基本角頻率

□ $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$, 表平均值

□ 偶數函之係數

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt , \quad n = 1, 2, \dots$$

□ 奇數函之係數

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt , \quad n = 1, 2, \dots$$

2. **Fourier 級數之指數 (複數) 形式**：週期為 T_0 之任意週期訊號 $x(t)$ 可以表成如下之級數和：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

其中

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

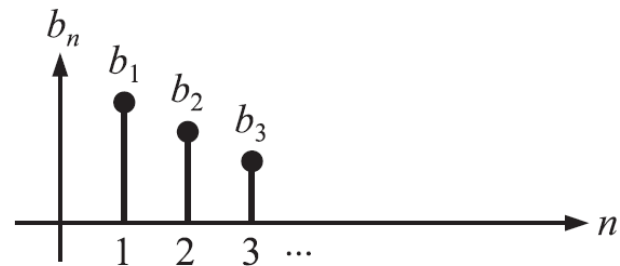
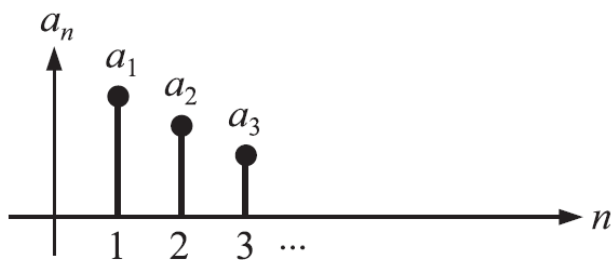
通式：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

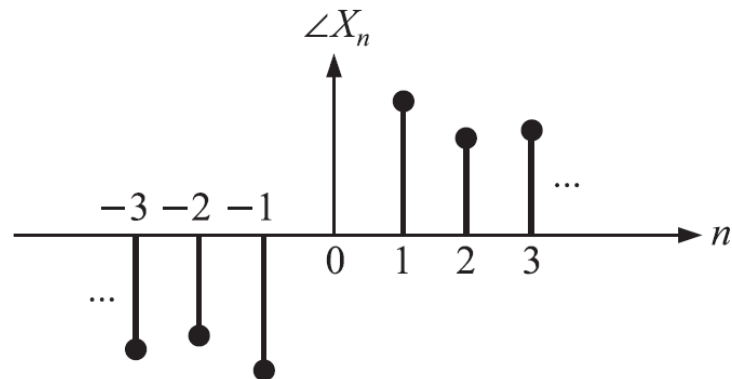
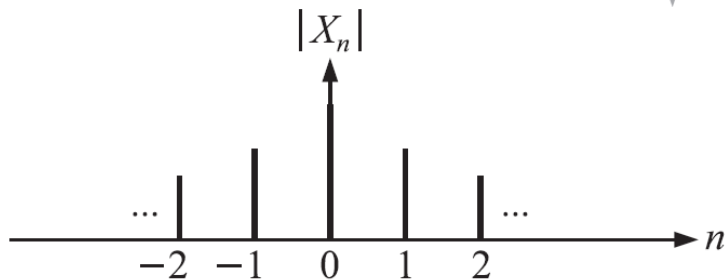
因 $X_n \in$ 複數，故可再表為 $X_n = |X_n| e^{j\phi_n} \equiv |X_n| e^{j\angle X_n}$ ，此處稱：

- $|X_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ：振幅頻譜 (Amplitude Spectrum)，為偶函數。
- $\angle X_n = \phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$ ：相位頻譜 (Phase Spectrum)，屬於奇函數。

又 $|X_n|$ 為偶函數，故再採用 $2|X_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $n > 0$ ，且稱 $2|X_n|$ 為單邊頻譜 (One-sided Spectrum)。現在繪圖說明 a_n 、 b_n 、 X_n 、 ϕ_n 之諸關係如圖 3-33，由此處可知週期函數之頻譜為離散 (Discrete)，稱為離散頻譜 (Discrete Spectrum) 或稱為線頻譜 (Line Spectrum)。



↓ **Double-sided Spectrum**



↓ **Single-sided Spectrum**

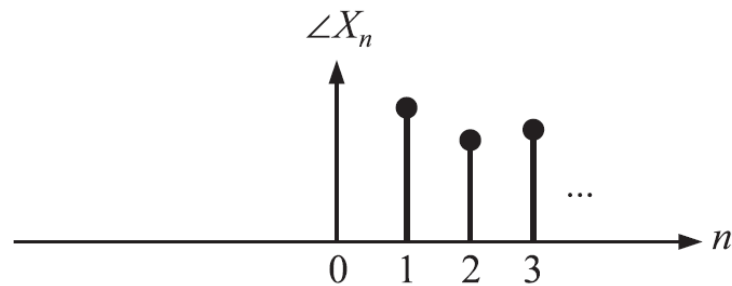
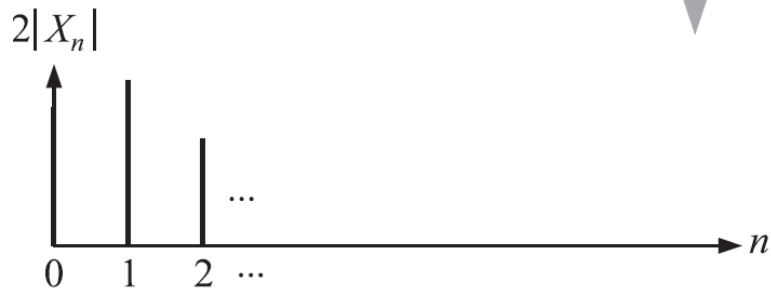


圖 3-33

定理 3-1 Parseval 定理

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (\text{平均功率})$$

證明

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-n)f_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot X_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \end{aligned}$$

因 X_n, X_{-n} 互為共軛複數！



即若論功率，只要知道週期函數 $x(t)$ 的振幅頻譜 $|X_n|$ 即可，因為 $|X_n|^2$ 已經是 $x(t)$ 的**功率頻譜 (Power Spectrum)**。意即

週期訊號之功率 = 線頻譜之能量和



例題 3-10
EXAMPLE

The Fourier series expansion of $x(t)$ is a sequence X_n . Which one of the following sequences is the Fourier series expansion of $x^*(t)$? (1) X_n (2) X_n^* (3) X_{-n} (4) X_{-n}^*

解

已知 $X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$ ，則

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^*(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt \right]^* = X_{-n}^*$$

故本題選 (4)。

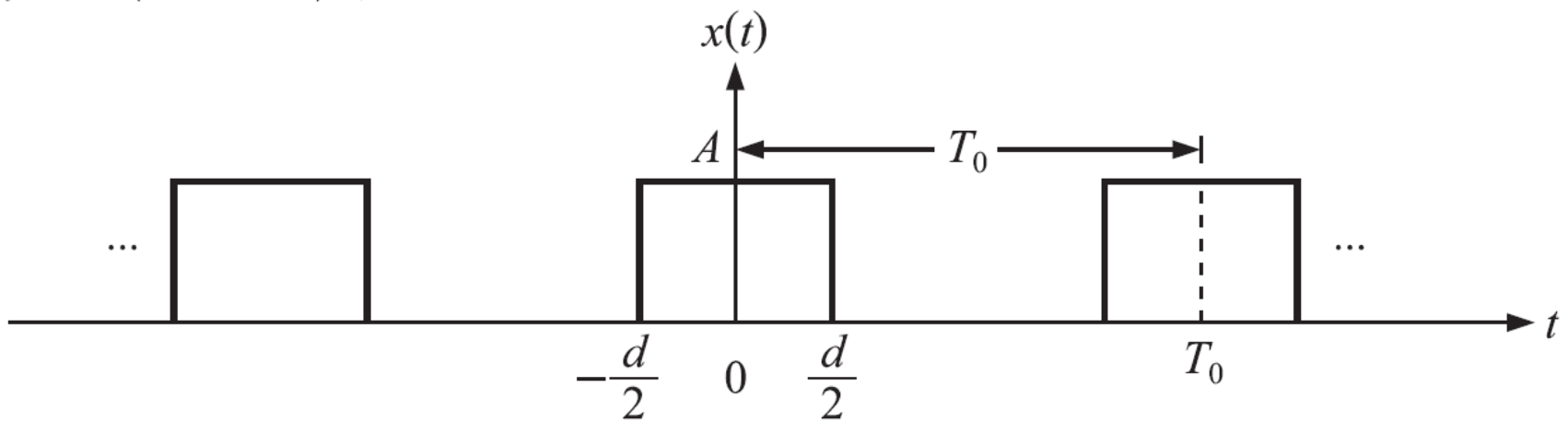


圖 3-34

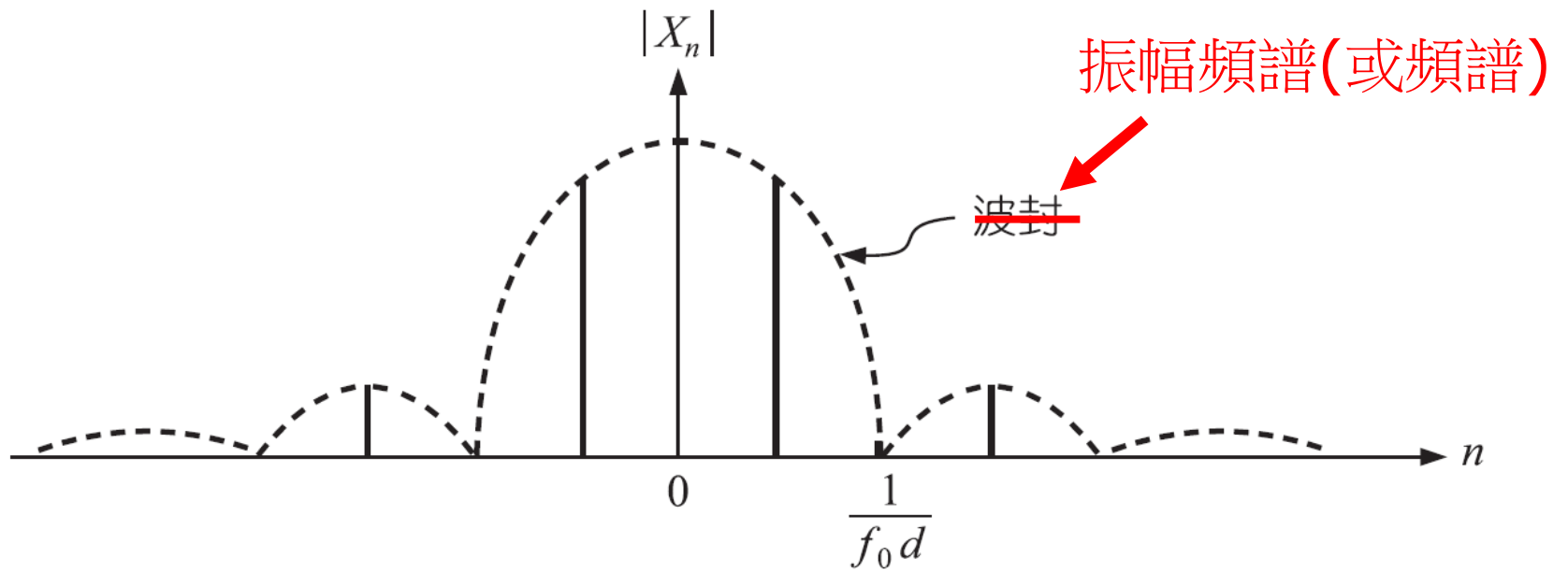


圖 3-35

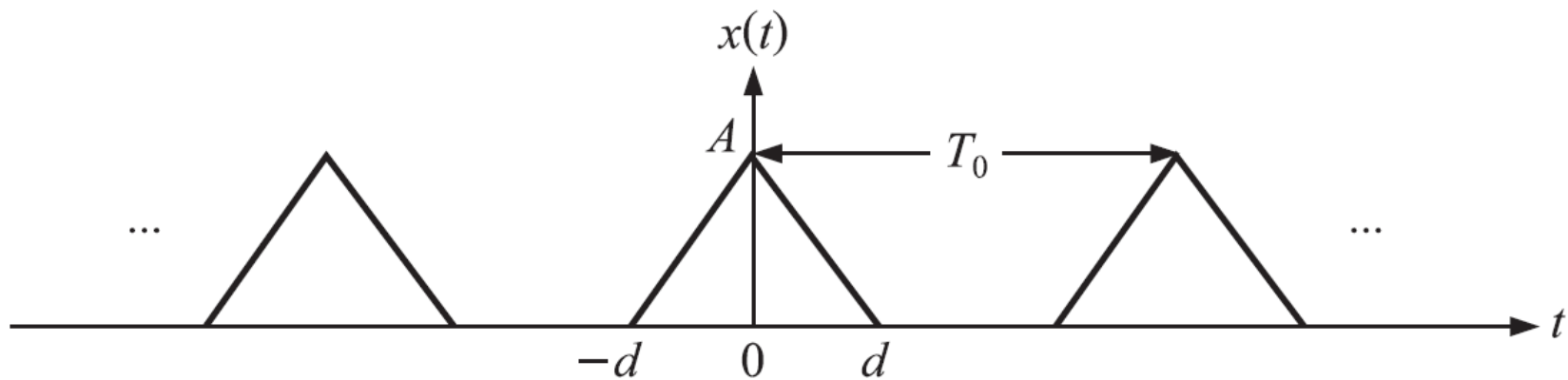


圖 3-36

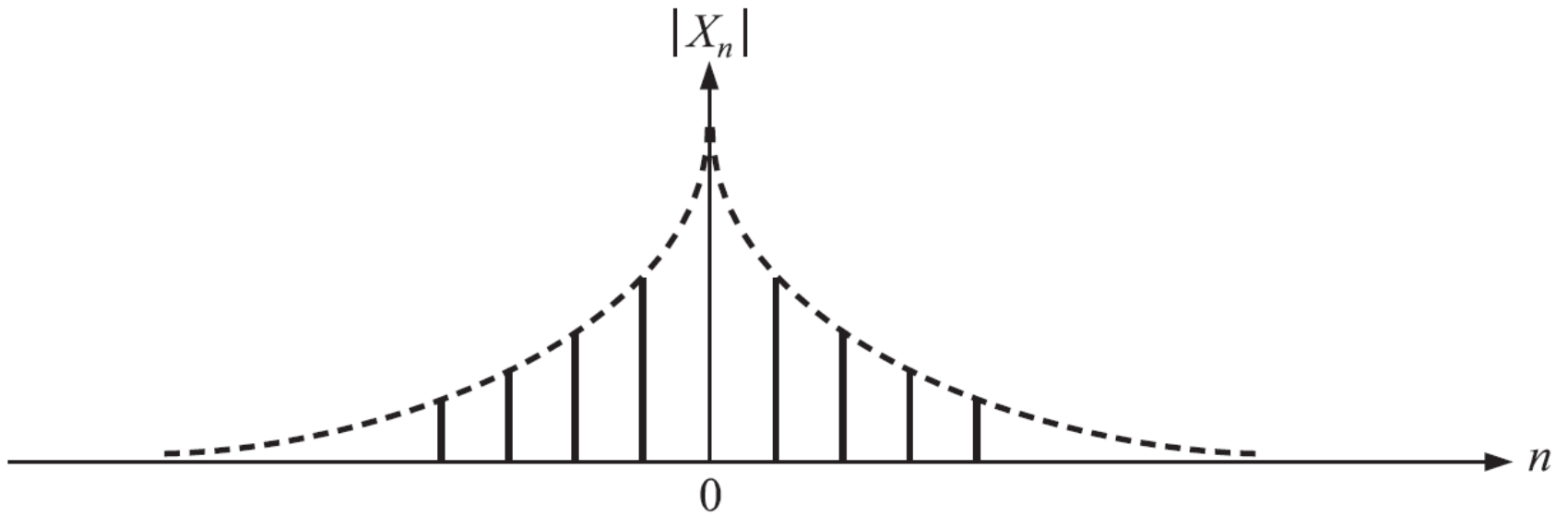


圖 3-37

二、Fourier變換

1. 非週期訊號 $x(t)$ 可以表成如下之積分式：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \equiv \mathfrak{F}^{-1}\{X(f)\}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \equiv \mathfrak{F}\{x(t)\}$$

此兩式稱爲 Fourier 變換。通常 $X(f) \in C$ ，所以

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi(f)} = |X(f)|e^{j\angle X(f)}$$

仍稱 $|X(f)|$ ：振幅頻譜； $\angle X(f) = \phi(f)$ ：相位頻譜。

2. 若 $x(t)$ 為實函數，則

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \equiv R(f) + jI(f)$$

其中

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (\text{偶函數})$$

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (\text{奇函數})$$

而 $|X(f)|$ 、 $\angle X(f)$ 、 $R(f)$ 、 $I(f)$ 之關係為

- $|X(f)| = \sqrt{R^2 + I^2}$ ：振幅頻譜 (屬偶函數)。
- $\angle X(f) = \tan^{-1} \left[-\frac{I(f)}{R(f)} \right]$ ：相位頻譜 (屬奇函數)。

3. (1) 若 $x(t)$ 為實數函數，則 $X(-f) = X^*(f)$ 。

證明 $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \Rightarrow X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt$

故 $X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt = X(-f)$ ，得證。

(2) 在 Fourier 變換下之 Parseval 定理又稱為 Rayleigh 能量定理，如下所示：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

證明 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right] dt$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right] df$ (變換積分順序)

因爲非週期訊號 $x(t)$ 之能量爲 $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ ，又由 Parseval 定理知 $E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$ ，因此一般稱 $G(f) \equiv |X(f)|^2$ 爲 $x(t)$ 的能量頻譜 (Energy Spectrum) 或能量頻譜密度函數 (Energy Spectral Density Function)。意即

非週期訊號之能量 = 頻譜上之能量和

三、Fouier轉換之性質

1. 線性性質：

$$\mathfrak{F}\{ax(t) + by(t)\} = aX(f) + bY(f)$$

2. 時間延遲 (Time-shift) 性質：

$$\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (3-4)$$

證明 $\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f(u+t_0)} du$
 $= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi fu} du = X(f)e^{-j2\pi ft_0}$

意義：在時間領域內產生延遲 (Time Delay)，則對應在頻率領域內產生相位角 (Phase，順時鐘方向)，且高頻時產生的相位角較低頻大。

3. 頻率移位 (Frequency-shift) 性質：

$$\mathfrak{F}\{e^{j2\pi at}x(t)\} = X(f - a) \quad (3-5)$$

證明 $\mathfrak{F}\{e^{j2\pi at} x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi at} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-a)t} dt = X(f-a)$

推論： $\mathfrak{F}\{x(t) \cos(2\pi at)\} = \frac{1}{2} [X(f-a) + X(f+a)]$ (3-6)

此結果稱為譜調變 (Modulation) 性質。

證明 因 $\cos(2\pi at) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi at} + e^{-j2\pi at})$ ，故

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{x(t) \cos(2\pi at)\} &= \mathfrak{F}\left\{x(t) \cdot \frac{1}{2}[e^{j2\pi at} + e^{-j2\pi at}]\right\} \\ &= \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi at}\right\} + \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi at}\right\} \\ &= \frac{1}{2}[X(f-a) + X(f+a)]\end{aligned}$$



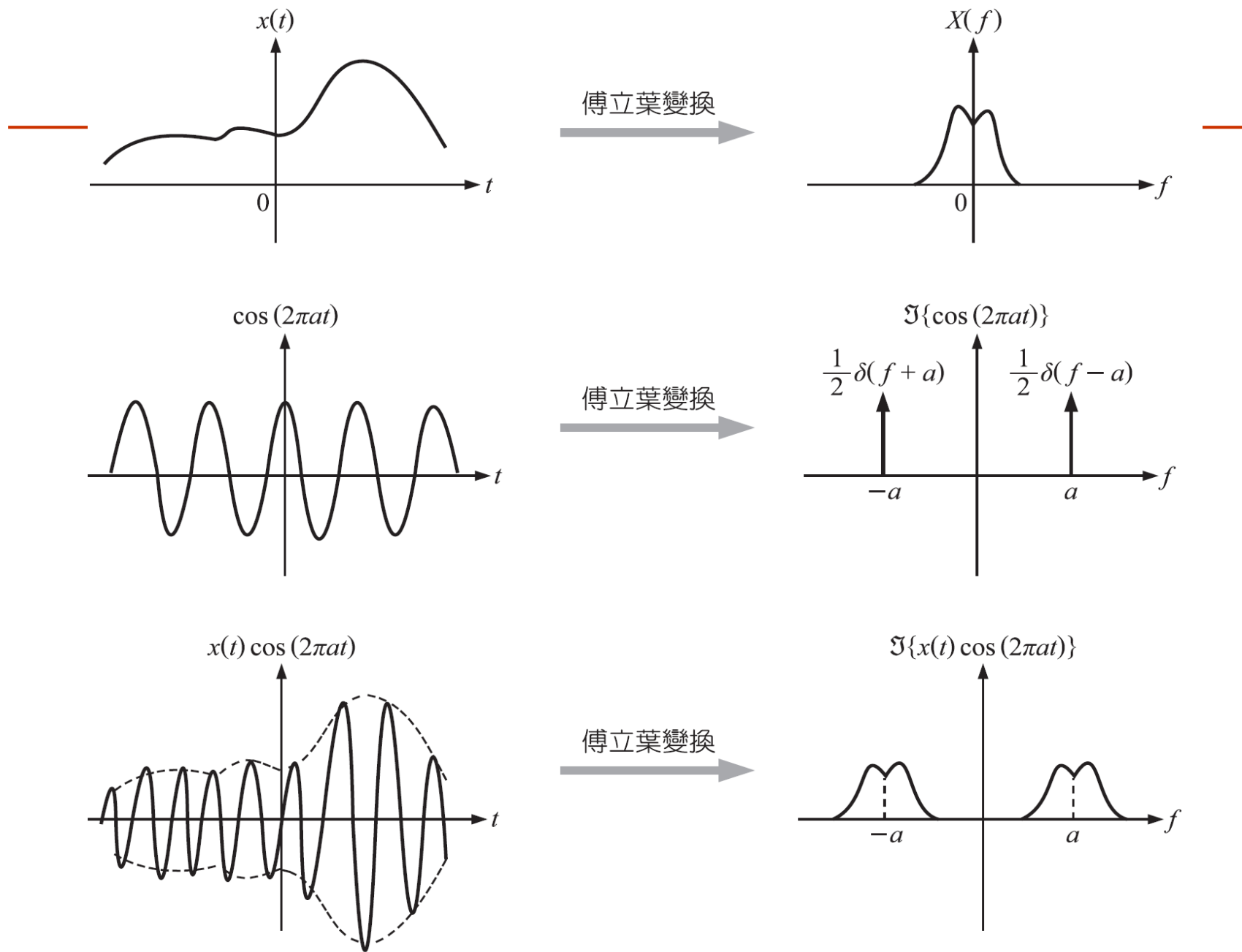


圖 3-38

推論：同理可得

$$\mathfrak{F}\{x(t) \sin(2\pi at)\} = \frac{1}{2j} [X(f - a) - X(f + a)] \quad (3-7)$$

4. 微分性質：若 $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} x(t) = 0$ ，則

$$\mathfrak{F}\{x'(t)\} = j2\pi fX(f) \quad (3-8)$$

證明 $\mathfrak{F}\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-j2\pi ft} dt = x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$
 $= 0 + j2\pi f \mathfrak{F}\{x(t)\} = j2\pi f \mathfrak{F}\{x(t)\}$ ，得證。

意義：微分增強了訊號的高頻分量！

5. 積分性質：

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f) \quad (3-9)$$

證明 如圖 3-39，利用 $x(t)$ 與 Unit Step Function $u(t)$ 之褶積運算知

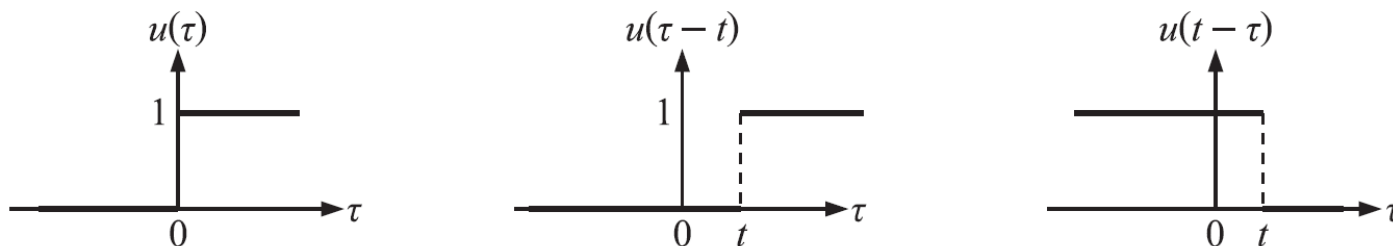


圖 3-39

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

故
$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \mathfrak{F}\{x(t) * u(t)\} = \mathfrak{F}\{x(t)\} \mathfrak{F}\{u(t)\} = X(f) \left[\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right]$$

6. 面積性質：

$$\begin{cases} X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \\ x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df \end{cases} \quad (3-10)$$

說明：由 $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ ，令 $f = 0$ 代入得

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

由 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ ，令 $t = 0$ 代入得

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$

但並非每個訊號 $x(t)$ 都有面積性質，例如週期函數即無面積性質。

7. 尺度性質：

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

(3-11)

8. 「對稱性質」 (Symmetric Property) : 又稱「對偶性質」 (Dual Property) :

$$\mathfrak{F}\{X(t)\} = x(-f) \quad (3-14)$$

證明 將 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ 之變數 t 與 f 互換即得

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j2\pi ft} dt$$

再以 $-f$ 代替 f 代入上式得

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt = \mathfrak{F}\{X(t)\}$$



例題 3-14
EXAMPLE

求方波 $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{d}\right)$ 之 Fourier 變換。

解 $x(t)$ 如圖 3-40 所示。

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= 2A \int_0^{\frac{d}{2}} \cos(2\pi ft) dt = 2A \left[\frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi ft) \right]_0^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi df) \equiv Ad \frac{\sin(\pi df)}{\pi df} = Ad \operatorname{sinc}(df) \end{aligned}$$

$X(f)$ 如圖 3-41 所示。

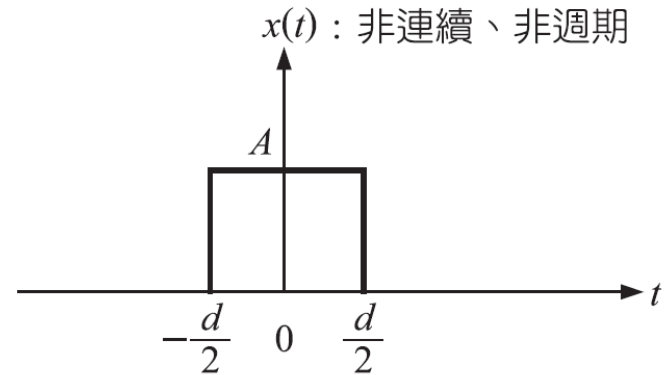


圖 3-40

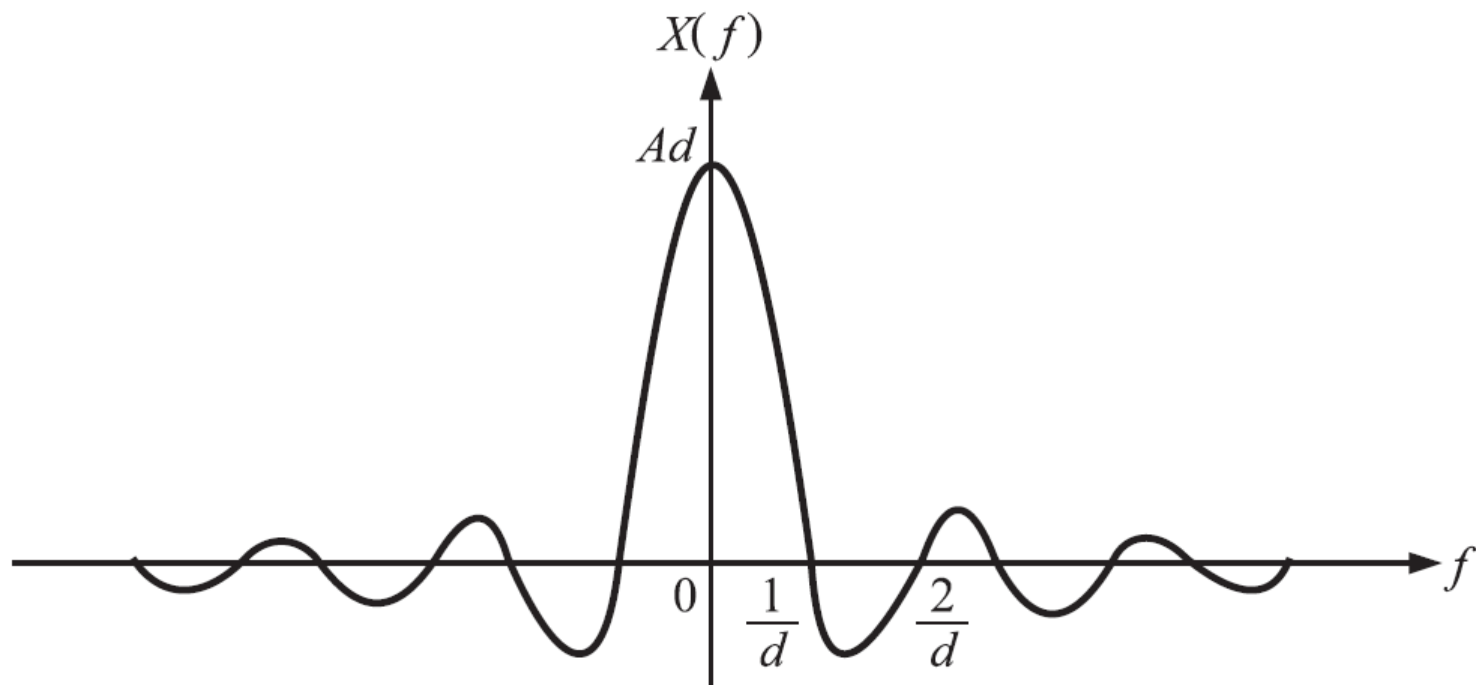


圖 3-41

此頻譜是連續頻譜！且 $X(f) \in R$ 。

即
$$\mathfrak{F}\left\{\Pi\left(\frac{t}{d}\right)\right\} = d \sin c(df) \quad (3-15)$$

且
$$\mathfrak{F}^{-1}\{\sin c(df)\} = \frac{1}{d} \Pi\left(\frac{t}{d}\right) \quad (3-16)$$

又應用對稱性質可得

$$\mathfrak{F}\{\sin c(dt)\} = \frac{1}{d} \Pi\left(\frac{f}{d}\right) \quad (3-17)$$

若直接計算 $\mathfrak{F}\{\sin c(dt)\}$ 會較繁，因為需利用複變函數理論。且知

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\Pi\left(\frac{f}{d}\right)\right\} = d \sin c(dt) \quad (3-18)$$

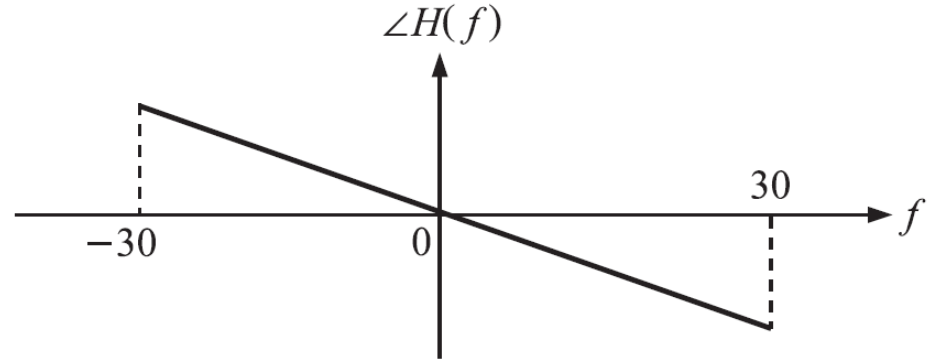
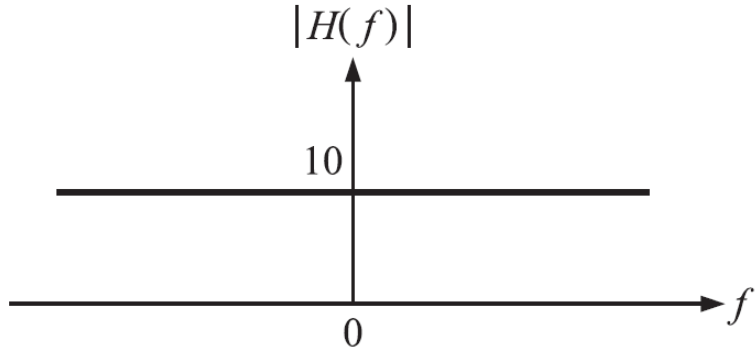


圖 3-42

例題 3-16
EXAMPLE

求三角波 $x(t) = A\Lambda\left(\frac{t}{d}\right)$ 之 Fourier 變換。

解 $x(t)$ 如圖 3-43 所示。

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= 2 \int_0^d A\left(1 - \frac{t}{d}\right) \cos(2\pi ft) dt \quad (\text{偶函數之緣故}) \\ &= \frac{2A}{(2\pi f)^2 d} [1 - \cos(2\pi fd)] = \frac{4A \sin^2(\pi df)}{(2\pi f)^2 d} \\ &= Ad \left[\frac{\sin(\pi df)}{\pi df} \right]^2 = Ad \operatorname{sinc}^2(df) \end{aligned}$$

即

$$\mathfrak{F} \left\{ \Lambda\left(\frac{t}{d}\right) \right\} = d \operatorname{sinc}^2(df) \quad (3-19)$$

且

$$\mathfrak{F}^{-1} \{ \operatorname{sinc}^2(df) \} = \frac{1}{d} \Lambda\left(\frac{t}{d}\right) \quad (3-20)$$

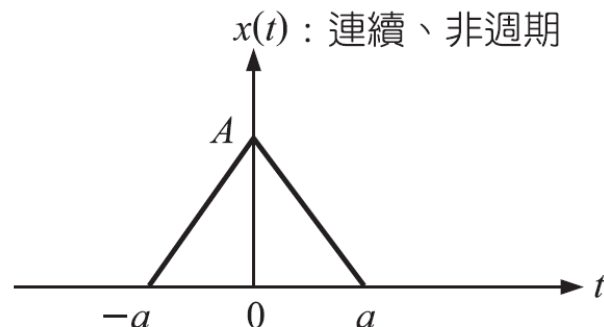


圖 3-43

又應用對稱性質可得

$$\mathfrak{F}\{\sin c^2(dt)\} = \frac{1}{d} \Lambda\left(\frac{f}{d}\right) \quad (3-21)$$

若直接計算 $\mathfrak{F}\{\sin c^2(dt)\}$ 會較繁，因為需利用複變函數理論。且知

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\Lambda\left(\frac{f}{d}\right)\right\} = d \sin c^2(dt) \quad (3-22)$$

心得

1. 「週期」函數之 Fourier 變換為「離散」譜函數。
2. 「非週期」函數之 Fourier 變換為「連續」譜函數。

例題 3-17
EXAMPLE

求雙向指數波 $x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$ 之 Fourier 變換。

解

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} \cos(2\pi ft) dt \quad (\text{偶函數之緣故}) \\ &= \frac{2\alpha A}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

如圖 3-45 所示。接著利用對稱性質得

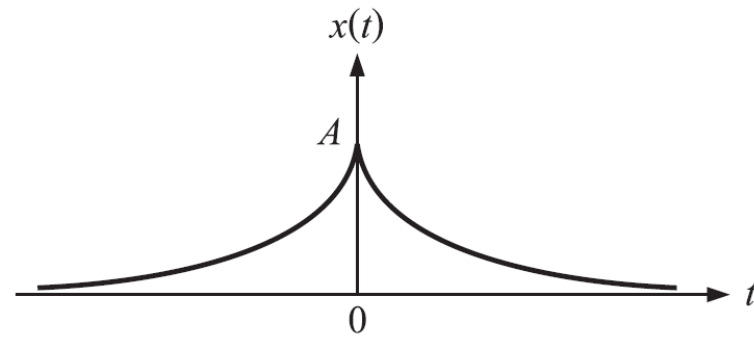


圖 3-44

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{2\alpha A}{\alpha^2 + (2\pi t)^2}\right\} = Ae^{-\alpha|f|} = Ae^{-\alpha|f|}$$

即
$$\mathfrak{F}\left\{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi t)^2}\right\} = e^{-\alpha|f|}$$

令 $\alpha = 2\pi$ 代入整理得
$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}\right\} = e^{-2\pi|f|},$$

故

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \pi e^{-2\pi|f|}$$

此式後面會用到，記之！令 $\alpha = 2\pi a$ 代入整理得出如下之通式：

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\} = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|f|} \tag{3-23}$$

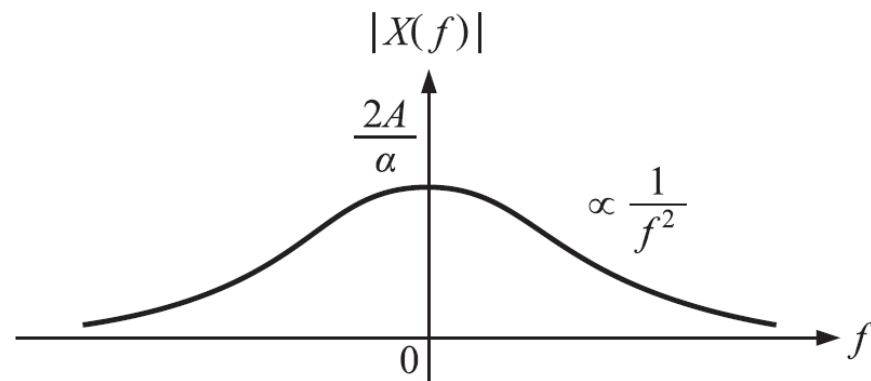


圖 3-45



例題 3-18
EXAMPLE

求單向指數波 $x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 之 Fourier 變換。

解

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt$$
$$= A \left[\frac{1}{-(\alpha + j2\pi f)} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}$$

$$|X(f)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$



例題 3-19
EXAMPLE

求脈衝函數 $x(t) = A\delta(t)$ 之 Fourier 變換。

解

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = Ae^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = A \text{ (偶函數之緣故)}。$$

例題 3-20
EXAMPLE

- (1) 求 $x(t) = e^{-\alpha|t|} \text{sgn}(t)$ 之 Fourier 變換。
- (2) 求 $x(t) = \text{sgn}(t)$ 之 Fourier 變換。
- (3) 求 $x(t) = u(t)$ 之 Fourier 變換。

解 (1) $x(t)$ 如圖 3-46 所示。

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= -\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{\alpha - j2\pi f} e^{(\alpha - j2\pi f)t} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{1}{-(\alpha + j2\pi f)} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \right]_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{\alpha - j2\pi f} + \frac{1}{\alpha + j2\pi f} = \frac{-j4\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \quad (\text{純虛數})
 \end{aligned}$$

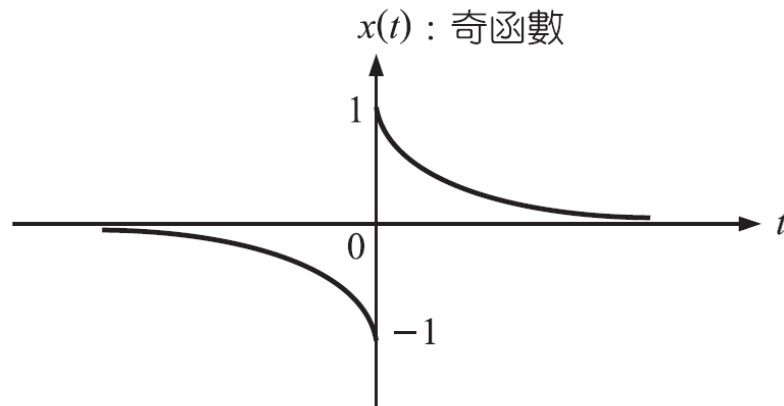


圖 3-46

(2) $x(t)$ 如圖 3-47。

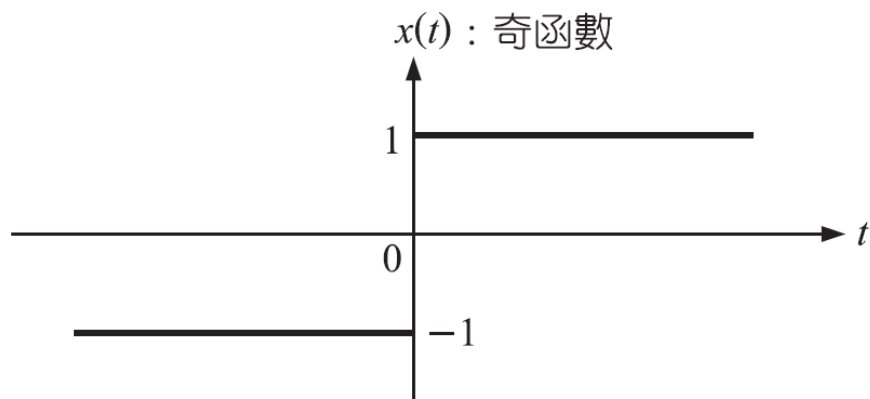


圖 3-47

$$X(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j4\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \frac{-j4\pi f}{(2\pi f)^2} = \frac{-j}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f} \text{ (純虛數)}$$

即

$$\mathfrak{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

(3-24)

因此得 $|X(f)| = \frac{1}{\pi f}$ ，如圖 3-48。

$|X(f)|$: 視 $\text{sgn}(t)$ 無直流成分 (抵消了)

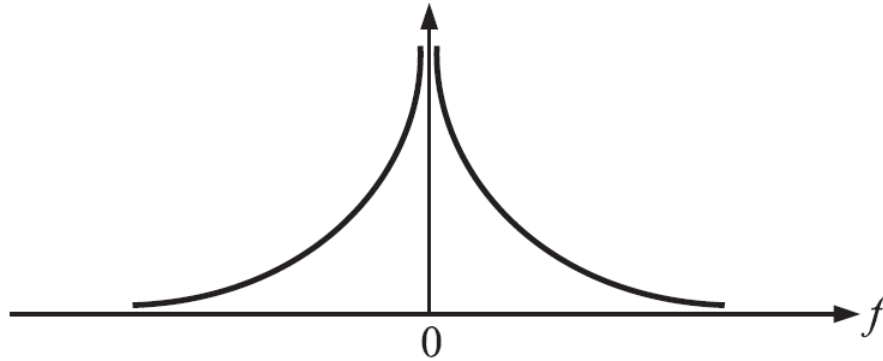


圖 3-48

公式：應用對稱性質得 $\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{j\pi t}\right\} = \text{sgn}(-f)$ ，即

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\text{sgn}(f)$$

(3) $u(t)$ 與 $\text{sgn}(t)$ 之圖形形狀關係可知 $u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)]$ 。同理可知

$$u(-t) = \frac{1}{2}[1 - \text{sgn}(t)]$$

則
$$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2} \left[\delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \right] = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (3-25)$$

且
$$|X(f)| = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2\pi f}$$

$X(f)$ 包含 $\delta(f)$ ，表示了 $x(t)$ 包含直流 (DC) 成分。

例題 3-21
EXAMPLE

求 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ 之傅立葉變換。

解 $x(t)$ 如圖 3-49。

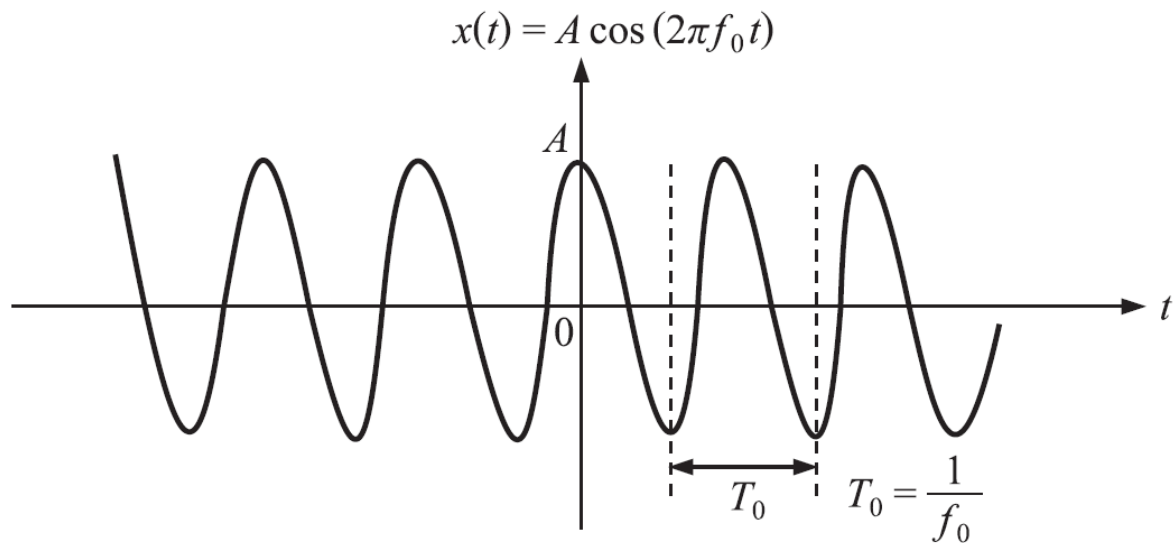


圖 3-49

故

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}] dt = \frac{A}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \end{aligned}$$

即

$$\mathfrak{F}\{A \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

結果如圖 3-50 所示。

引申：

$$\mathfrak{F}\{A \sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

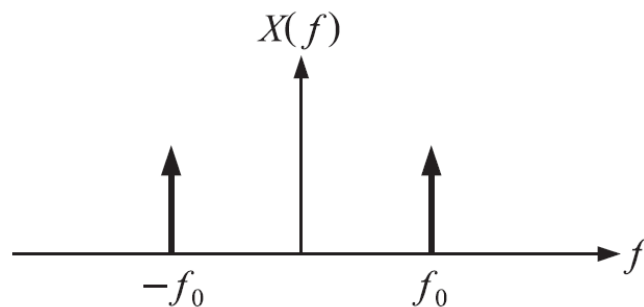


圖 3-50

● 定義 3-1

兩個函數 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之「褶積」定義如下式：

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \quad (3-26)$$

9. 傅立葉變換之「褶積性質」(Convolution Property)：若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之傅立葉變換分別為 $X(f)$ 、 $Y(f)$ ，則

$$(1) \quad \mathfrak{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f)Y(f) \quad (3-27)$$

$$(2) \quad \mathfrak{F}\{x(t)y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3-28)$$

表 3-1 傅立葉變換之重要性質

性質	時域	頻域
1. 重疊原理	$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$	$c_1X_1(f) + c_2X_2(f)$
2. 時間延遲	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
3. 尺度變換	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$
4. 對偶	$X(t)$	$x(-f)$
5. 頻移	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
6. 調變	$x(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$
7. 摺積 (Convolution)	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f)X_2(f)$
8. 乘積	$x_1(t)x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$
9. 面積	$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$	$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$
10. —	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2(-f) df = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(-f)X_2(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(f)X_2(f) df$	

表 3-2 常用的傅立葉變換對

$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(f)(2\pi\delta(\omega))$
$\delta(t)$	1
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)(2\pi\delta(\omega - \omega_0))$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{sinc}(fT)$
$W \text{sinc}(Wt)$	$rect\left(\frac{f}{W}\right)$
$tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{sinc}^2(fT)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)](\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)])$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$	$f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s), f_s = \frac{1}{T_s}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
$\frac{1}{1 + t^2}$	$\pi e^{-2\pi f }$

Remark

1. 週期信號之 Fourier 變換：

$$\text{令 } x(t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s) \Rightarrow x(t + T_s) = x(t)$$

$$x(t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n f_s t}, \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} x(t) e^{-i2\pi n f_s t} dt = \frac{1}{T_s} = f_s$$

故

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n F(e^{i2\pi n f_s t}) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s)$$

2. Poisson Sum Formula : 若週期信號

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t - mT_0)$$

利用 $\delta(t - T_0) * p(t) = p(t - T_0)$ 可得

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0) \\ X(f) &= P(f)F \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0) \right\} \\ &= f_0 P(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \\ &= f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_0) \delta(f - nf_0) \end{aligned}$$

將 $X(f)$ 進行 Fourier Inverse Transform 可得

$$x(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_0) \exp(j2\pi n f_0 t)$$

此與原週期信號 $x(t)$ 比較後可得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t - mT_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_0) \exp(j2\pi n f_0 t)$$

稱此式為 Poisson Sum Formula。同理可得 Poisson Sum Formula 之另外一種表示法：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} P(f - mf_0) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(nT_0) \exp(-j2\pi n f T_0)$$

● 定義 3-2

自相關函數 (Auto-Correlation Function)

能量訊號函數 $x(t)$ 之「自相關函數」 $R_{xx}(\tau)$ 定義如下：

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt \quad (3-31)$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

$$\begin{aligned} F^{-1}\{G(f)\} &= F^{-1}\{X(f)X^*(f)\} = F^{-1}\{X(f)\} * F^{-1}\{X^*(f)\} \\ &= x(t) * x(-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt \\ &= R_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

● 定義 3-3

互相關函數 (Cross-Correlation Function)

兩個能量訊號函數 $x(t)$ 與 $y(t)$ 間之互相關函數 $R_{xy}(\tau)$ 定義如下：

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau) dt \quad (3-33)$$

利用變數變換計算可知

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt \quad (u = t + \tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u-\tau)y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u-\tau) du = R_{yx}(-\tau) \end{aligned}$$

即得

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

同理可知

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

因此 $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$ ，即 $R_{xy}(\tau)$ 不是偶函數！需注意之。

從互相關函數之外型可以看出應與褶積運算有關聯，即可以證出如下之式：

$$R_{xy}(\tau) = [x(-t) * y(t)]_{t=\tau} \quad (3-34)$$

證明 由 $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$, 所以

$$x(-t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t + \tau) d\tau$$

將 t 、 τ 互調得 $x(-\tau) * y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau) dt = R_{xy}(\tau)$ (得證)。



故得

$$\begin{cases} R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{cases} \quad (3-38)$$

此處稱 $|X(f)|^2 \equiv G(f)$ 為**能量頻譜密度函數** (Energy Spectral Density Function)，此式所代表之意義為：自相關函數 $R_{xx}(\tau)$ 與能量頻譜密度函數 $G(f)$ 互為傅立葉變換對！此結果即為著名之 **Weiner-Khichin 關係式 (定理)**。即

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{時間領域：自相關函數} \\ \text{頻率領域：能量頻譜密度函數} \end{array} \right\} \quad (\text{互為傅立葉變換對！})$$

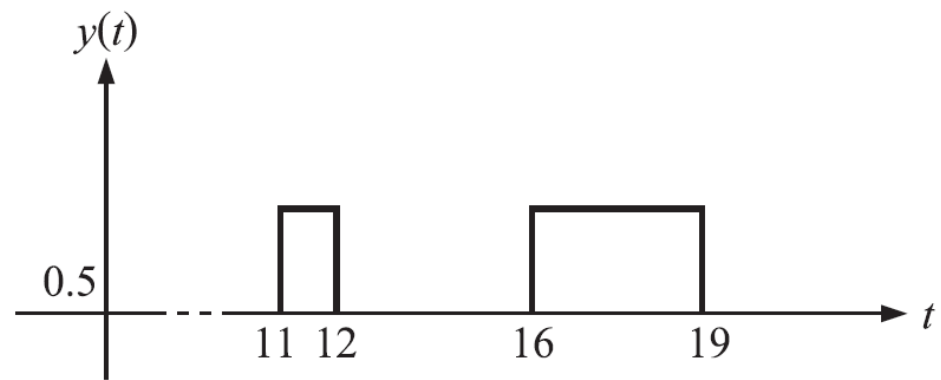
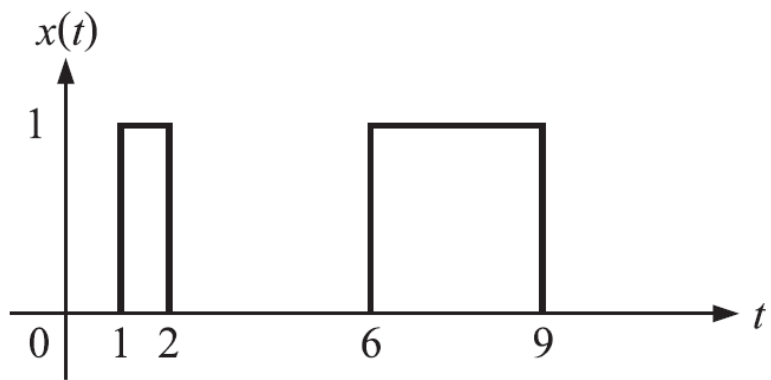


圖 3-51

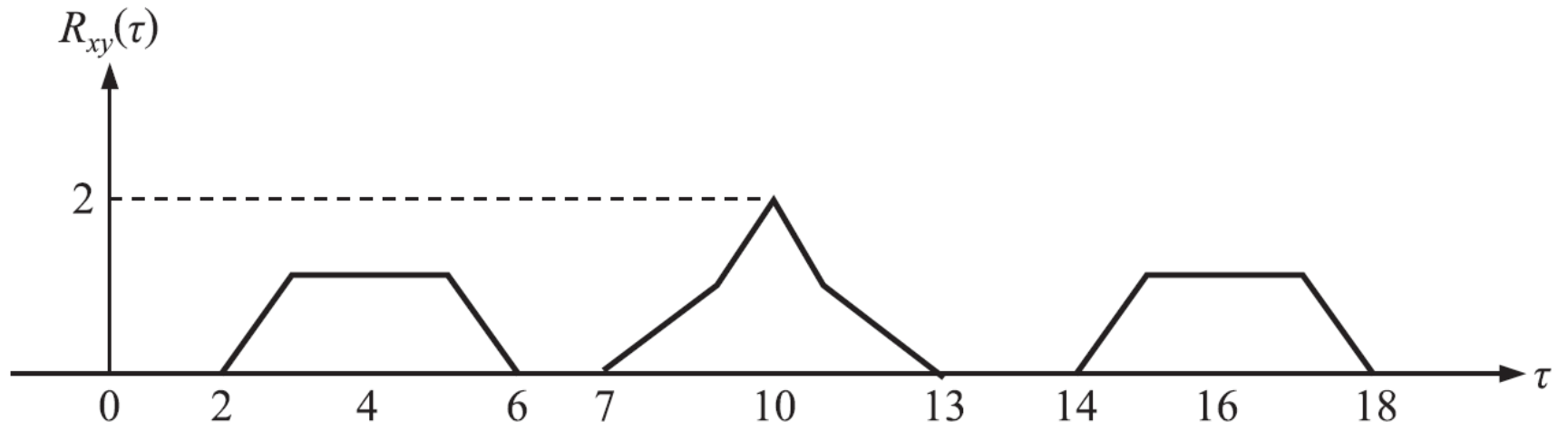


圖 3-52

$$\overline{R_{xx}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (3-39)$$

$$\overline{R_{xy}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (3-40)$$

上兩式分別稱爲**平均 (Average) 自相關函數**與**平均互相關函數**。可得：

1. $P = \overline{R_{xx}}(0)$ ，即功率訊號的**平均功率 (Average Power)** P 僅是平均自相關函數 $\overline{R_{xx}}(\tau)$ 之特例。
2. $\overline{R_{xx}}(\tau)$ 仍爲偶函數。
3. $\mathfrak{F}\{\overline{R_{xx}}(\tau)\} = G(f)$ ：此處稱 $G(f)$ 爲**功率頻譜密度函數 (Power Spectral Density Function)**。
4. 若 $x(t)$ 爲週期 T_0 之函數，則 $\overline{R_{xx}}(\tau)$ 亦爲週期 T_0 之函數。



例題 3-24
EXAMPLE

若 $x(t) = A \sin 2\pi f_0 t$ ，試求：

- (1) $x(t)$ 之平均自相關函數 $\overline{R_{xx}}(\tau)$ 。
(2) $x(t)$ 之平均功率 P 。
(3) $x(t)$ 之功率頻譜密度函數 $S(f)$ 。

解

$$\begin{aligned} (1) \overline{R_{xx}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (A \sin 2\pi f_0 t) \{A \sin [2\pi f_0(t+\tau)]\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T (\sin 2\pi f_0 t) [\sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 \tau + \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 \tau] dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau \quad (\text{亦為週期函數、偶函數}) \end{aligned}$$

將結果繪如圖 3-53 所示。

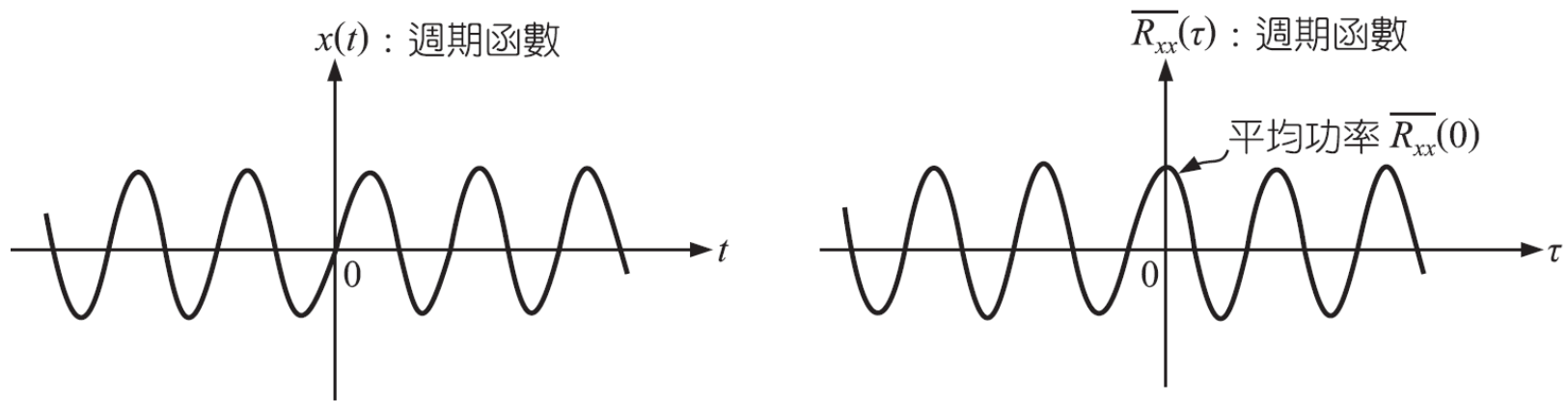


圖 3-53

由本題可知當 $x(t)$ 為週期函數時，則 $\overline{R}_{xx}(\tau)$ 亦為週期函數（即很相關），且週期均相同，這是符合相關性函數之原始意義的！

$x(t)$ 之平均功率：

$$P = \overline{R_{xx}}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau \Big|_{\tau=0} = \frac{A^2}{2} \quad (\text{與 } f_0 \text{ 無關})$$

此弦式波之平均功率結果要記住！以後會經常用到。

同理可知：若 $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ ，則 $\overline{R_{xx}}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$ 。因此其平均功率為

$$P = \overline{R_{xx}}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{A^2}{2} \quad (\text{與 } f_0 \text{ 無關})$$

(3) 功率頻譜密度函數為

$$S(f) = \mathfrak{F}\{\overline{R_{xx}}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau \right) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

例題 3-25
EXAMPLE

已知 $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{d}\right)$ ，則 $x(t) * x(t) = ?$

解 已知 $\mathfrak{F}\left\{\Pi\left(\frac{t}{d}\right)\right\} = d \operatorname{sinc}(df)$ ，故

$$\mathfrak{F}\{x(t) * x(t)\} = d^2 \operatorname{sinc}^2(df) \equiv d \mathfrak{F}\left\{\Lambda\left(\frac{t}{d}\right)\right\}$$

圖解如圖 3-54。

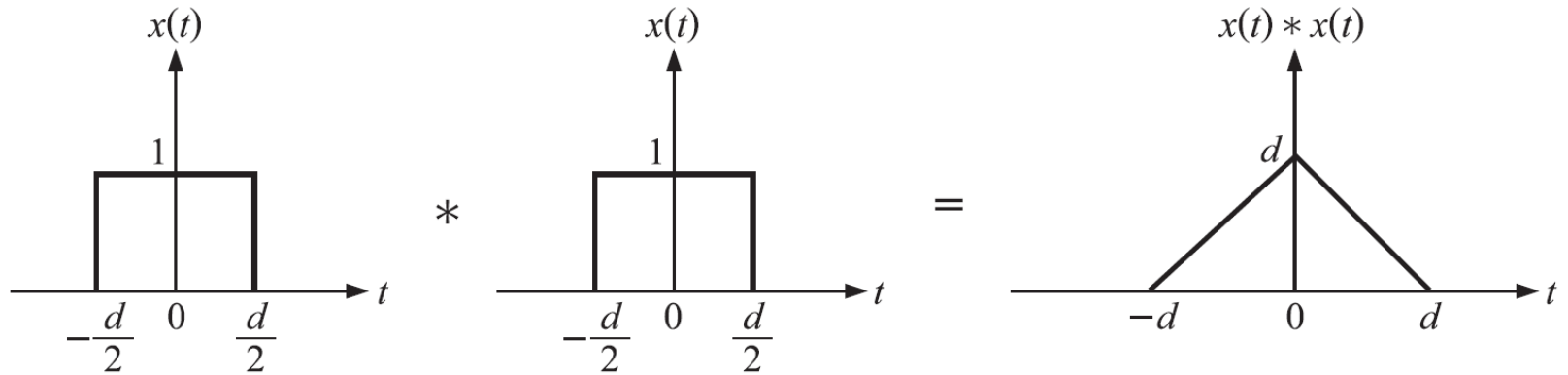


圖 3-54

此結果可表示為

$$\Pi\left(\frac{t}{d}\right) * \Pi\left(\frac{t}{d}\right) = d\Lambda\left(\frac{t}{d}\right) \quad (3-41)$$

且此結果可推廣為

$$A\Pi\left(\frac{t}{d}\right) * A\Pi\left(\frac{t}{d}\right) = A^2 d\Lambda\left(\frac{t}{d}\right) \quad (3-42)$$

即兩個相同方波的摺積結果等於一個三角波，如圖 3-55 所示。

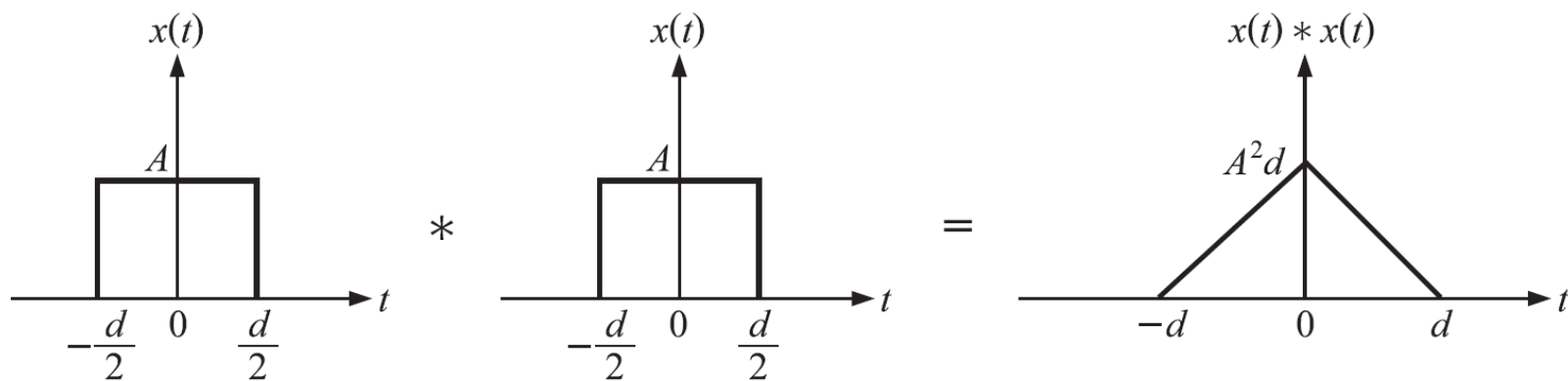


圖 3-55

若以面積來看，相當於：方波面積 \times 方波面積 = 三角波面積

$$\left(Ad \times Ad = A^2 d \cdot 2d \cdot \frac{1}{2} \right)$$

注意：已知方波 $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{d}\right)$ 之訊號寬度為 d ，而摺積後 $x(t) * x(t) = d\Lambda\left(\frac{t}{d}\right)$ 之訊號寬度已為 $2d$ ，此為摺積後時域會變寬（相當於時域之寬度相加）之一種事實。

例題 3-26
EXAMPLE

Consider a nonlinear system with the input-output characteristic $y(t) = x(t) + x^2(t)$. The input spectrum is shown in Fig. 3-56. Find and sketch the output spectrum.

解 看出 $X(f) = A\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$, 故

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) + X(f) * X(f) \\ &= A\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) + A\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) * A\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \\ &= A\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) + A^2 \cdot 2B\Lambda\left(\frac{f}{2B}\right) \end{aligned}$$

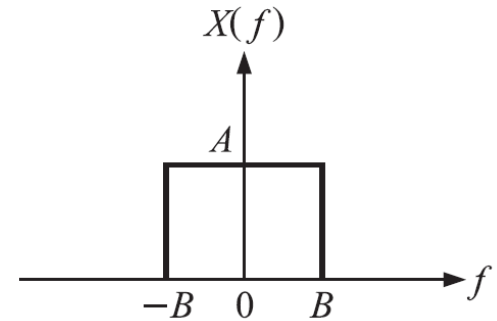


圖 3-56

圖形如圖 3-57。

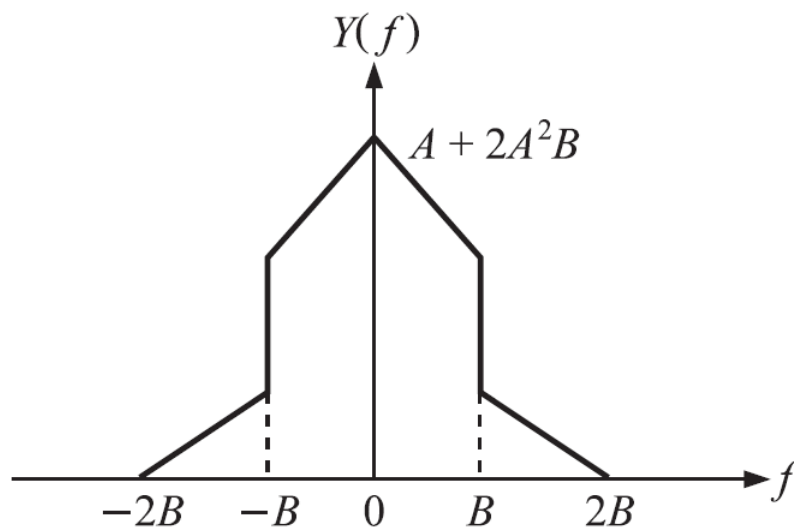


圖 3-57

引申：請問 $\Pi\left(\frac{t}{a}\right) * \Pi\left(\frac{t}{b}\right) = ?$ 其中 $a < b$ ，計算結果如圖 3-58。

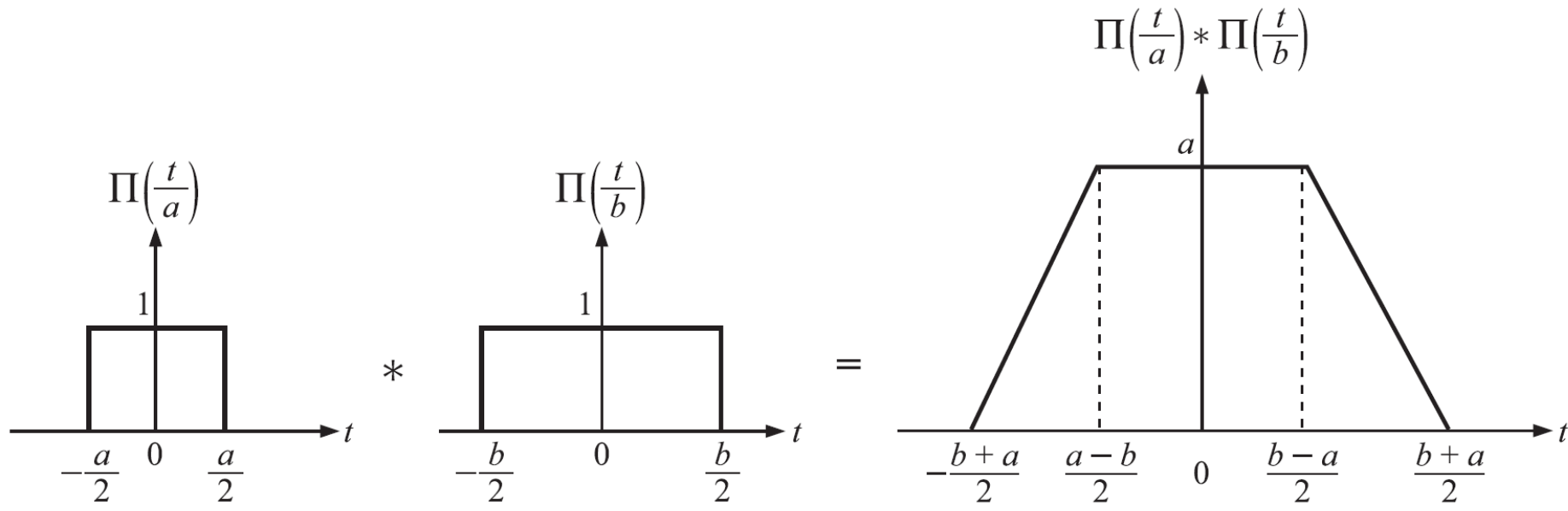


圖 3-58

即兩個不等方波的褶積結果等於一個梯形波！



例題 3-28
EXAMPLE

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c(t) dt = ?$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2(t) dt = ?$

解 (1) 因為 $\sin c(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Pi\left(\frac{f}{1}\right)$, 故 $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c(t) dt = \Pi(0) = 1$ 。

(2) 因為 $\sin c^2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Lambda\left(\frac{f}{1}\right)$, 故 $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2(t) dt = \Lambda(0) = 1$ 。

引申： $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c(at) dt = \frac{1}{a}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2(at) dt = \frac{1}{a}$ 。

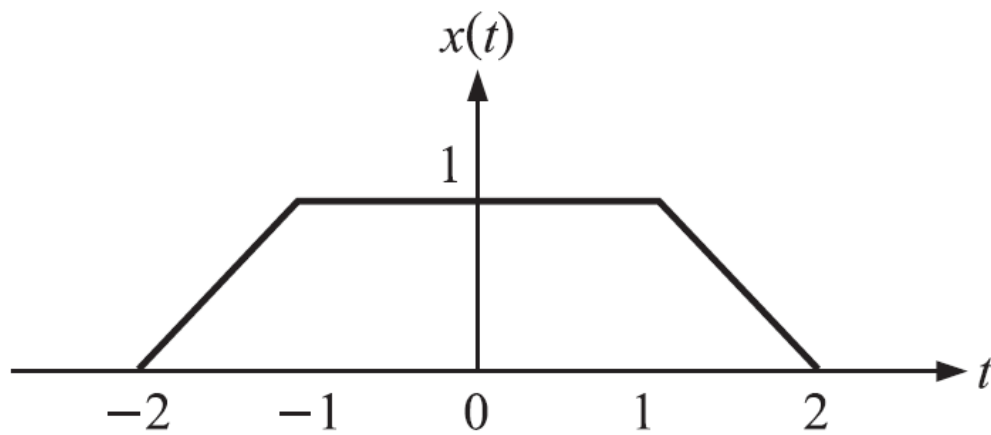


圖 3-59

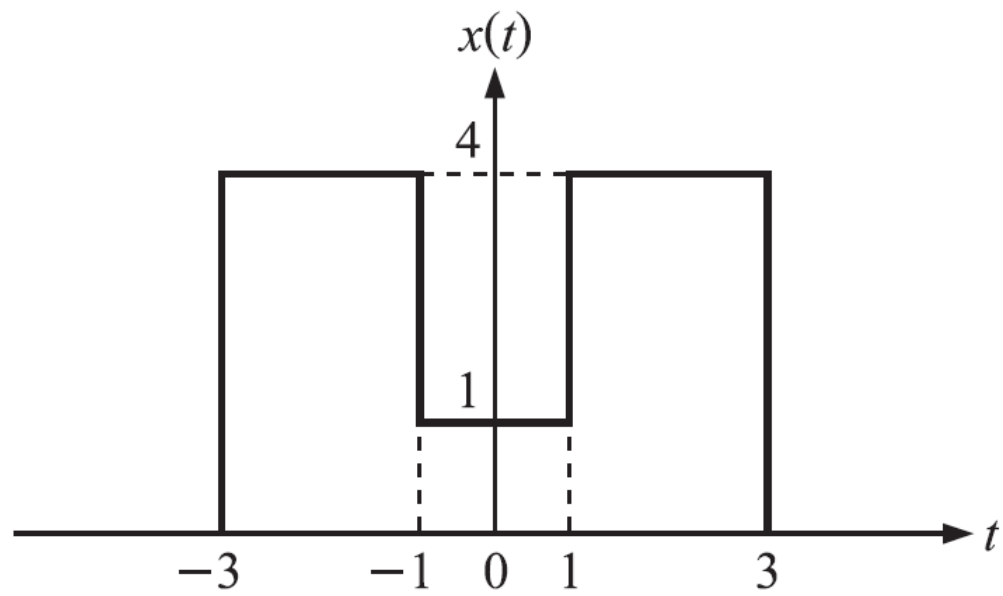


圖 3-60

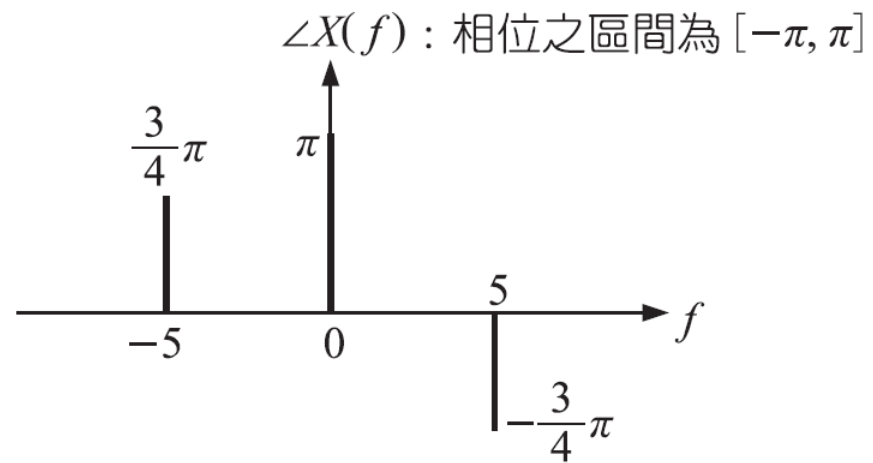
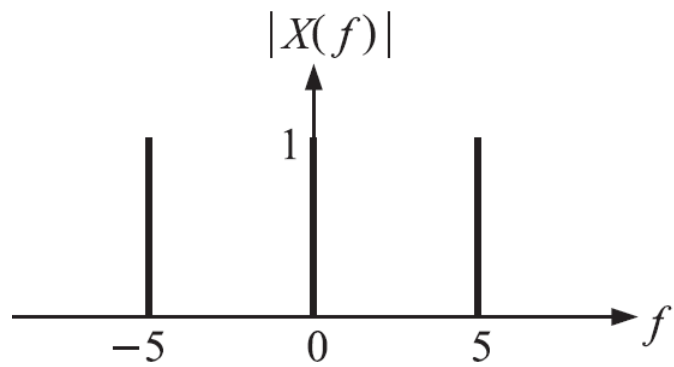


圖 3-61

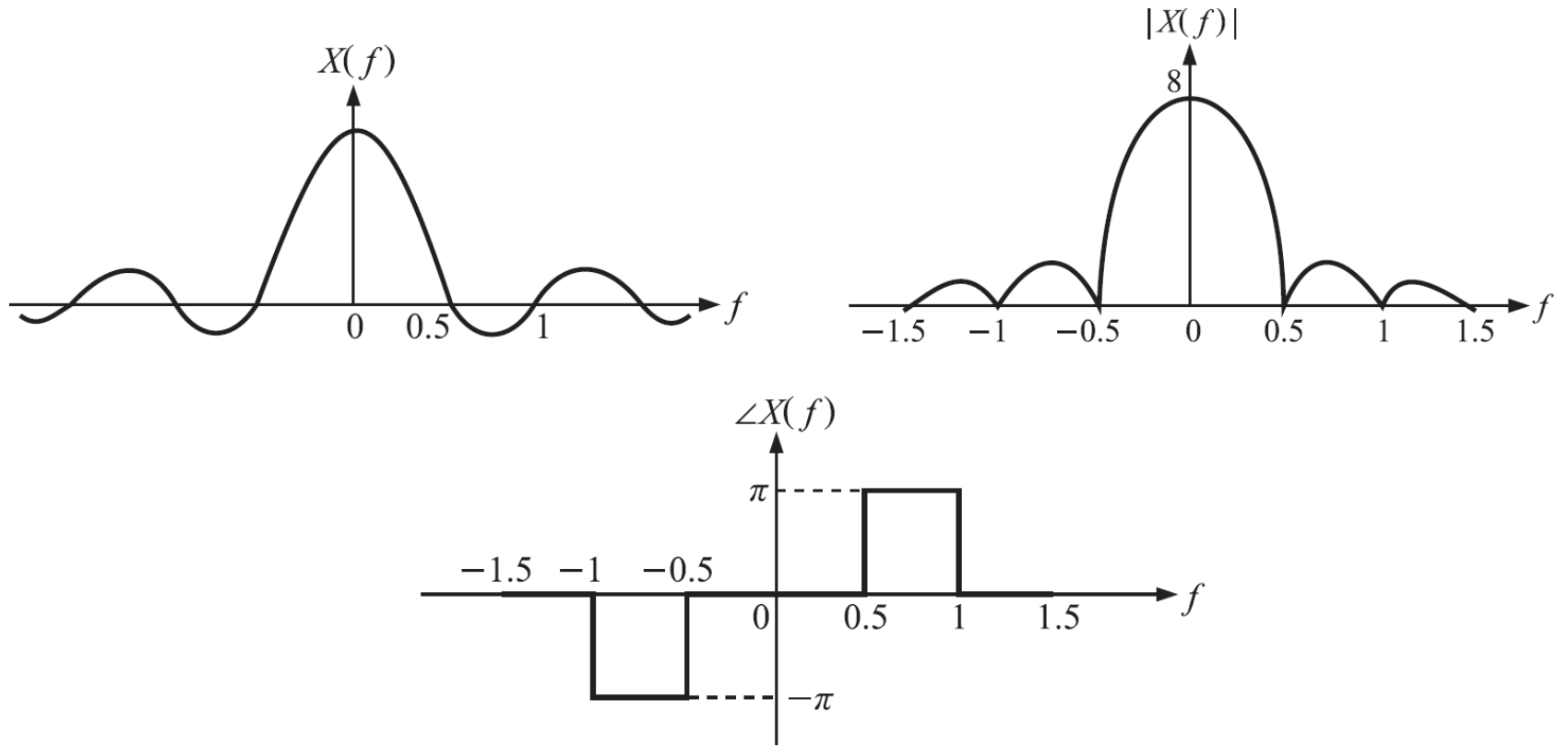


圖 3-62

Find the Fourier transform of

$$(1) x(t) = 2 \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{4}\right) - 4 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2) x(t) = \delta(t + 1) + \delta(t - 1)$$

and plot its amplitude and phase spectra.

解 (1) 先寫為

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cos\left(2\pi 3t - \frac{\pi}{4}\right) - 4 \cos\left(2\pi 5t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(2\pi 3t - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(2\pi 5t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \pi\right) \\ &= e^{j\left(2\pi 3t - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(2\pi 3t - \frac{\pi}{4}\right)} + 2e^{j\left(2\pi 5t + \frac{3\pi}{4}\right)} + 2e^{-j\left(2\pi 5t + \frac{3\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{故 } X(f) = \delta(f - 3)e^{-j\frac{1}{4}\pi} + \delta(f + 3)e^{j\frac{1}{4}\pi} + 2\delta(f - 5)e^{j\frac{3}{4}\pi} + 2\delta(f + 5)e^{-j\frac{3}{4}\pi}$$

振幅與相位頻譜如圖 3-63 所示。

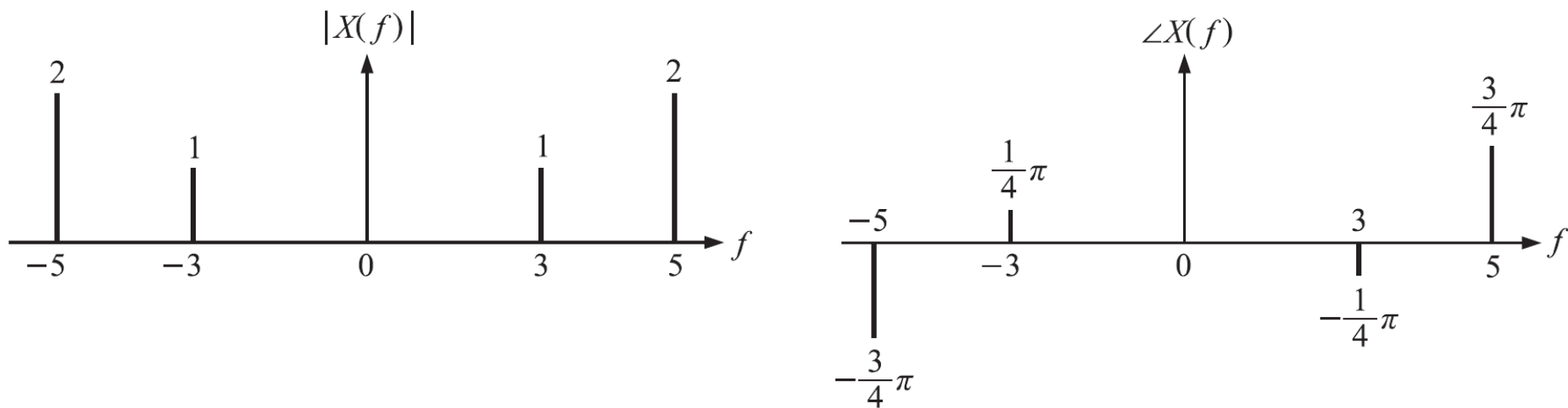
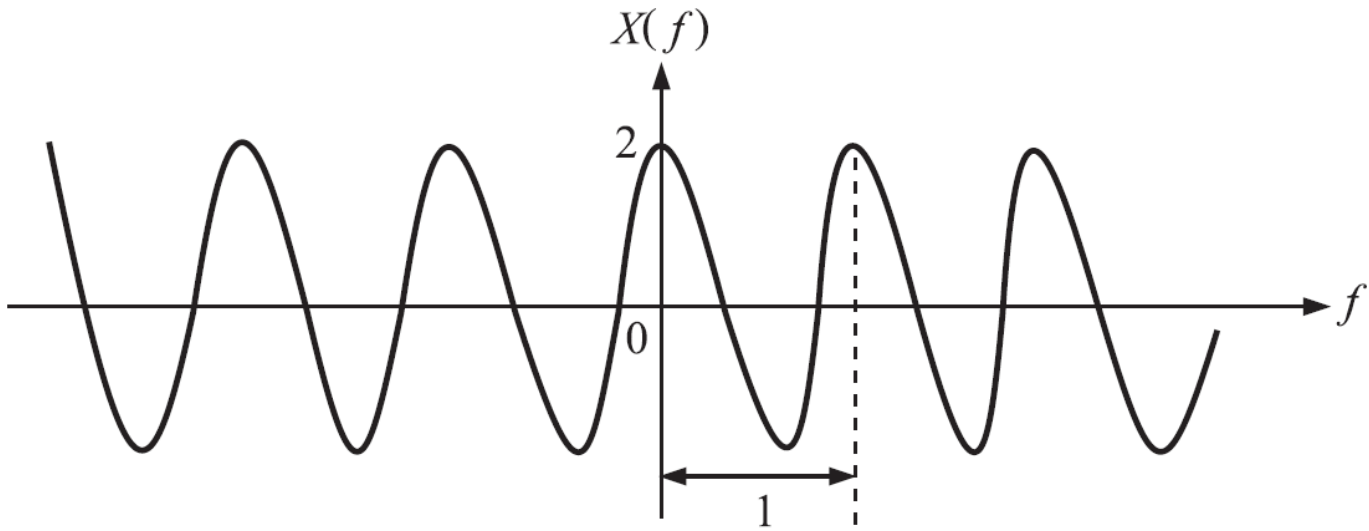


圖 3-63

(2) $X(f) = e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f} = 2 \cos(2\pi f) \in R$ ，則

$$f > 0 : \begin{cases} X(f) > 0 : \angle X(f) = 0 \\ X(f) < 0 : \angle X(f) = \pi \end{cases}, \quad f < 0 : \begin{cases} X(f) > 0 : \angle X(f) = 0 \\ X(f) < 0 : \angle X(f) = -\pi \end{cases}$$

先畫出 $X(f)$ ，則振幅 $|X(f)|$ 與相位 $\angle X(f)$ 頻譜如圖 3-64 所示。



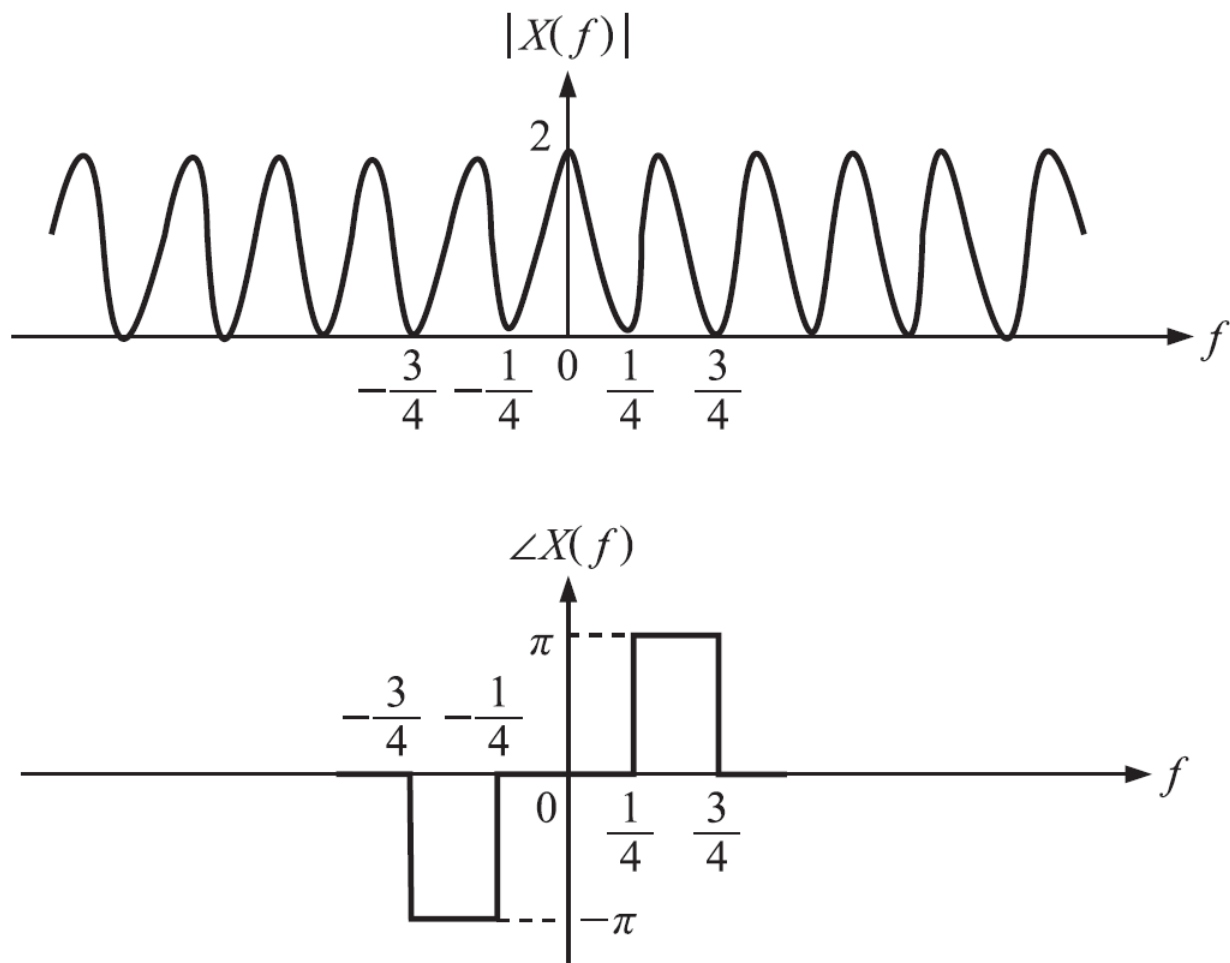
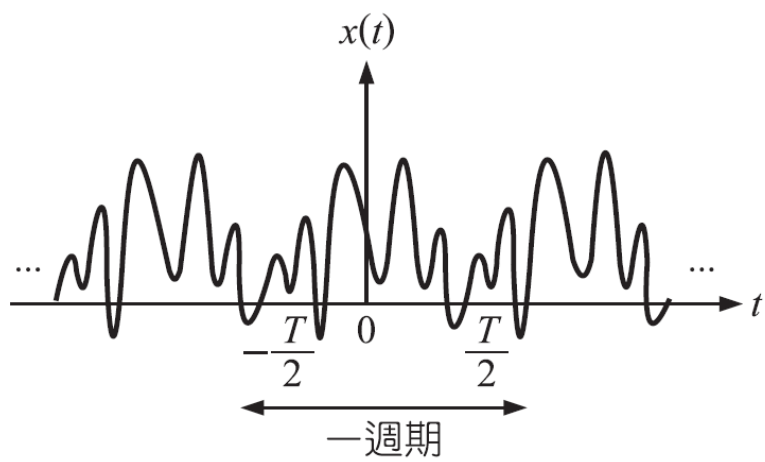


圖 3-64



傅立葉變換

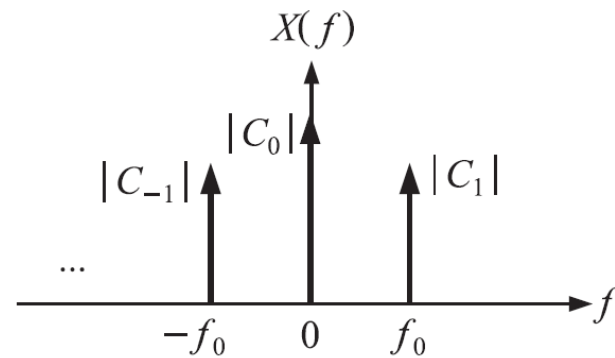


圖 3-65



例題 3-35
EXAMPLE

求三角波串 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-10n}{2}\right)$ 之傅立葉變換。

解 利用 $\mathfrak{F}\left[\Lambda\left(\frac{t}{d}\right)\right] = d \operatorname{sinc}^2(df)$ ！則

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathfrak{F}\{x(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-10n}{2}\right)\right\} = \mathfrak{F}\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-10n)\right] * \Lambda\left(\frac{t}{2}\right)\right\} \\ &= 2 \operatorname{sinc}^2(2f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{10} \delta\left(f - \frac{n}{10}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{10} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2}{10}n\right) \delta\left(f - \frac{n}{10}\right) \end{aligned}$$



例題 3-36
EXAMPLE

求脈衝串 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 之傅立葉變換。

解 (1) 令 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$ (因為是一種週期函數)，所以

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad \left[\text{因 } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}, \delta_T(t) = \delta(t) \right] = \frac{1}{T} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

故 $\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_0 t}$ (傅立葉級數之複數形式)。

$$(2) X(f) = \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{T} e^{j2\pi n f_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 \delta(f - n f_0), \text{ 即}$$

$$\mathfrak{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 \delta(f - n f_0)$$

結果圖示如圖 3-66 (其中 $f_0 = \frac{1}{T}$)。

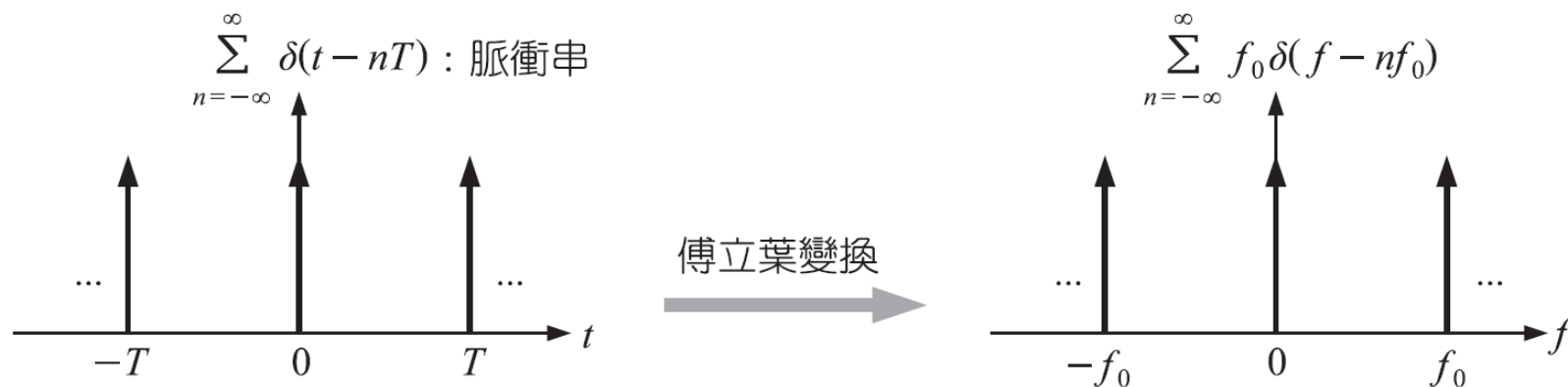


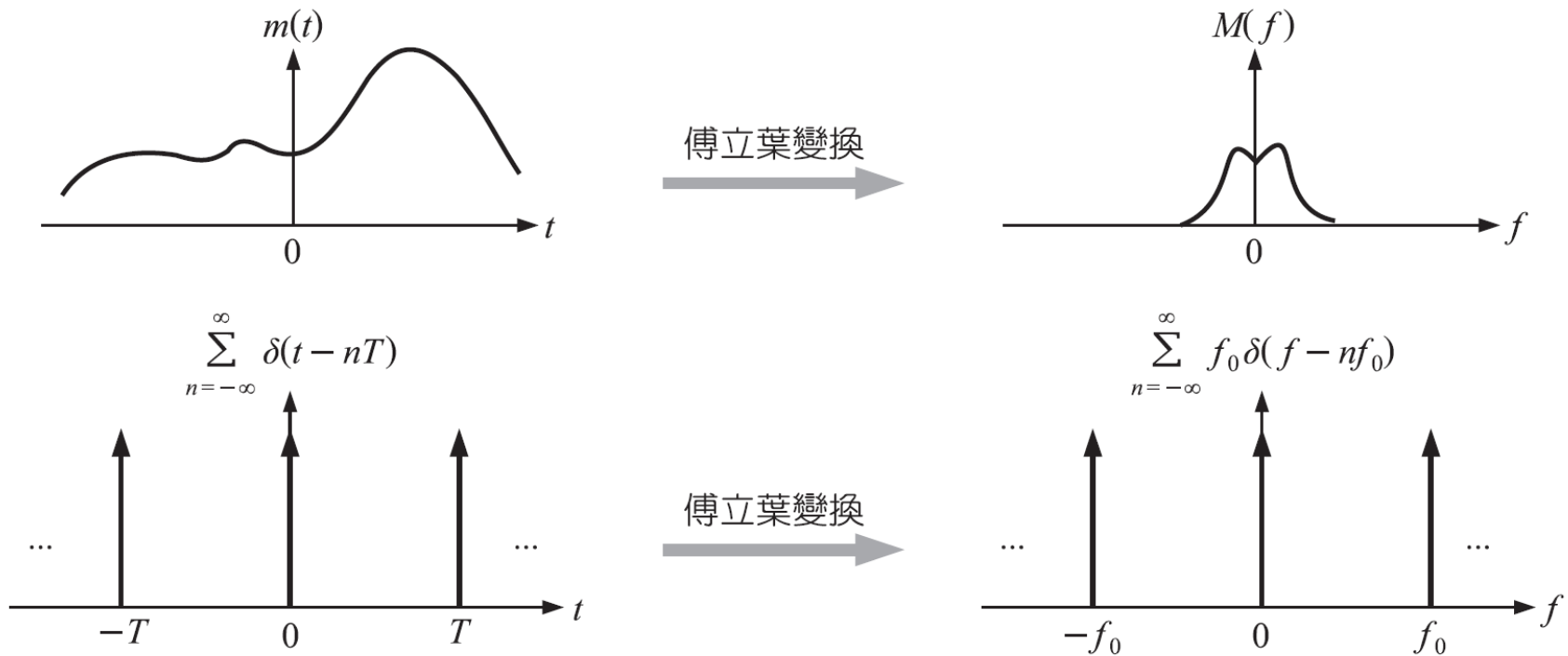
圖 3-66

當 T 越小，即訊號在時域取樣越密，則訊號在頻域越寬 (會增加頻寬)。

例題 3-37
EXAMPLE

If $x(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, where $\delta(t)$ is the Dirac delta function and T is a positive constant, find the Fourier transform $X(f)$ in terms of $M(f)$.

解 本題屬於理想取樣 (Ideal Sampling) 之觀念，現以圖 3-67 回答如下。



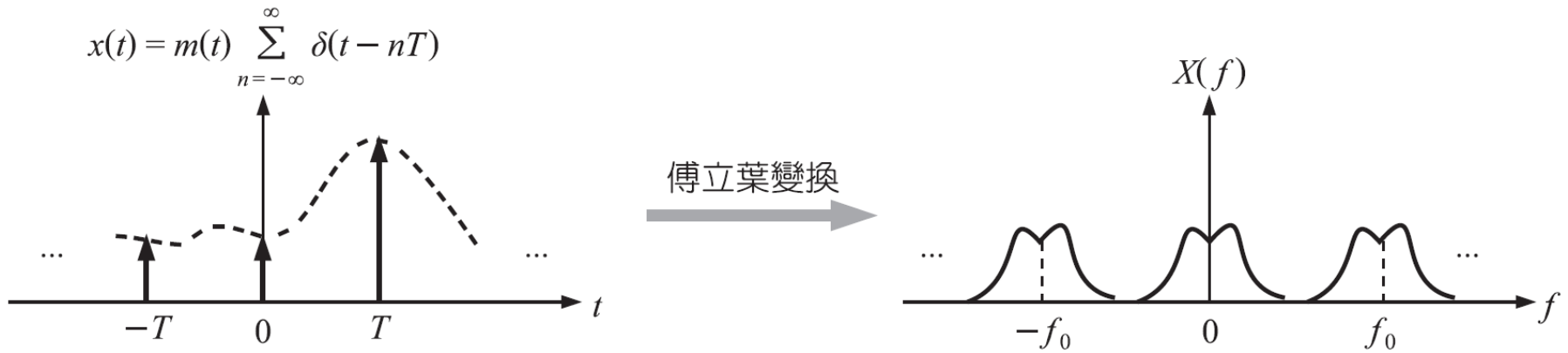


圖 3-67

例題 3-38
EXAMPLE

求脈波串 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_0}{d}\right)$ 之傅立葉變換。

解 $x(t)$ 之波形如圖 3-68 所示。

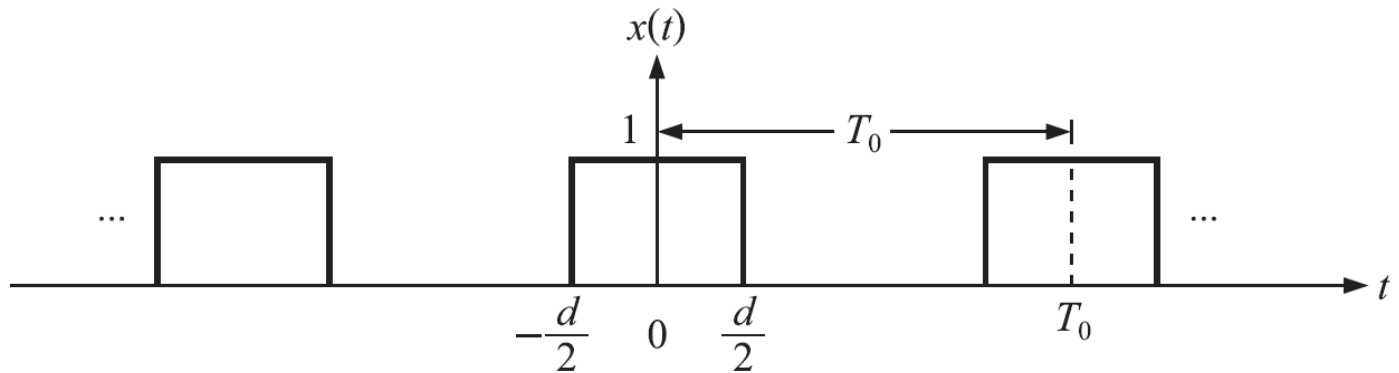


圖 3-68

先令 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$ ，此處 $f_0 = \frac{1}{T_0}$ ，則

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[\frac{1}{-j2\pi n f_0} e^{-j2\pi n f_0 t} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{\sin(n\pi f_0 d)}{n\pi f_0} \equiv \frac{d}{T_0} \frac{\sin(\pi n f_0 d)}{\pi n f_0 d} = df_0 \operatorname{sinc}(n f_0 d) \end{aligned}$$

故

$$X(f) = \mathfrak{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} df_0 \operatorname{sinc}(n df_0) e^{j2\pi n f_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} df_0 \operatorname{sinc}(n df_0) \delta(f - n f_0)$$

即

$$\mathfrak{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{t - nT_0}{d} \right) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} df_0 \operatorname{sinc}(n df_0) \delta(f - nf_0)$$

此式在脈波調變會用到！結果如圖 3-69 所示。

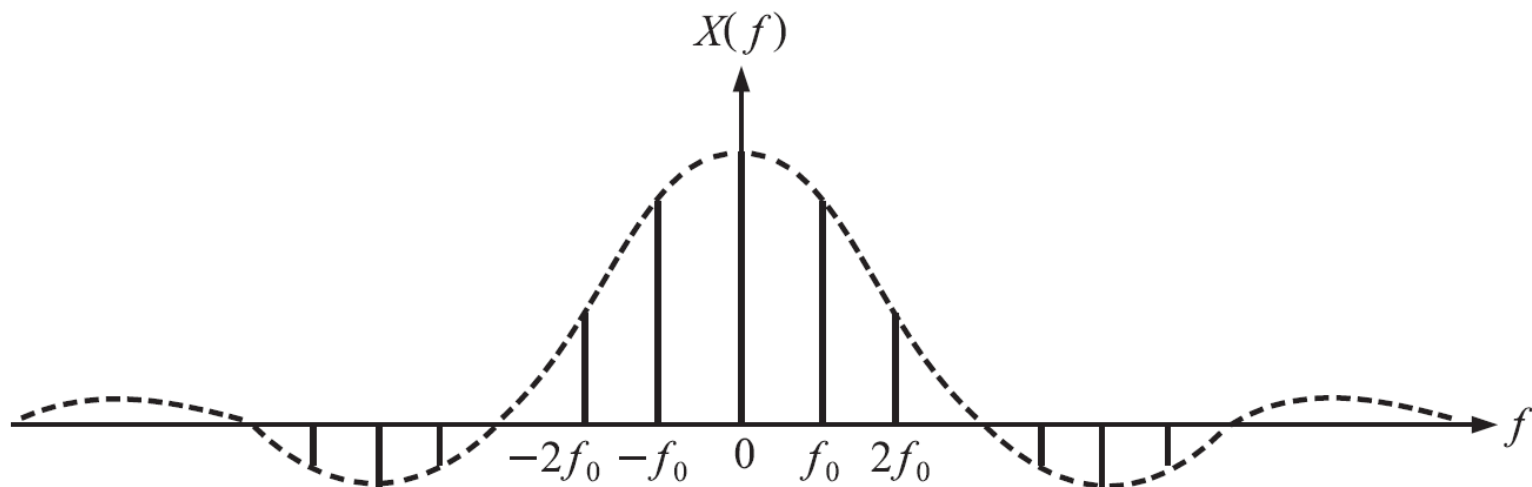


圖 3-69

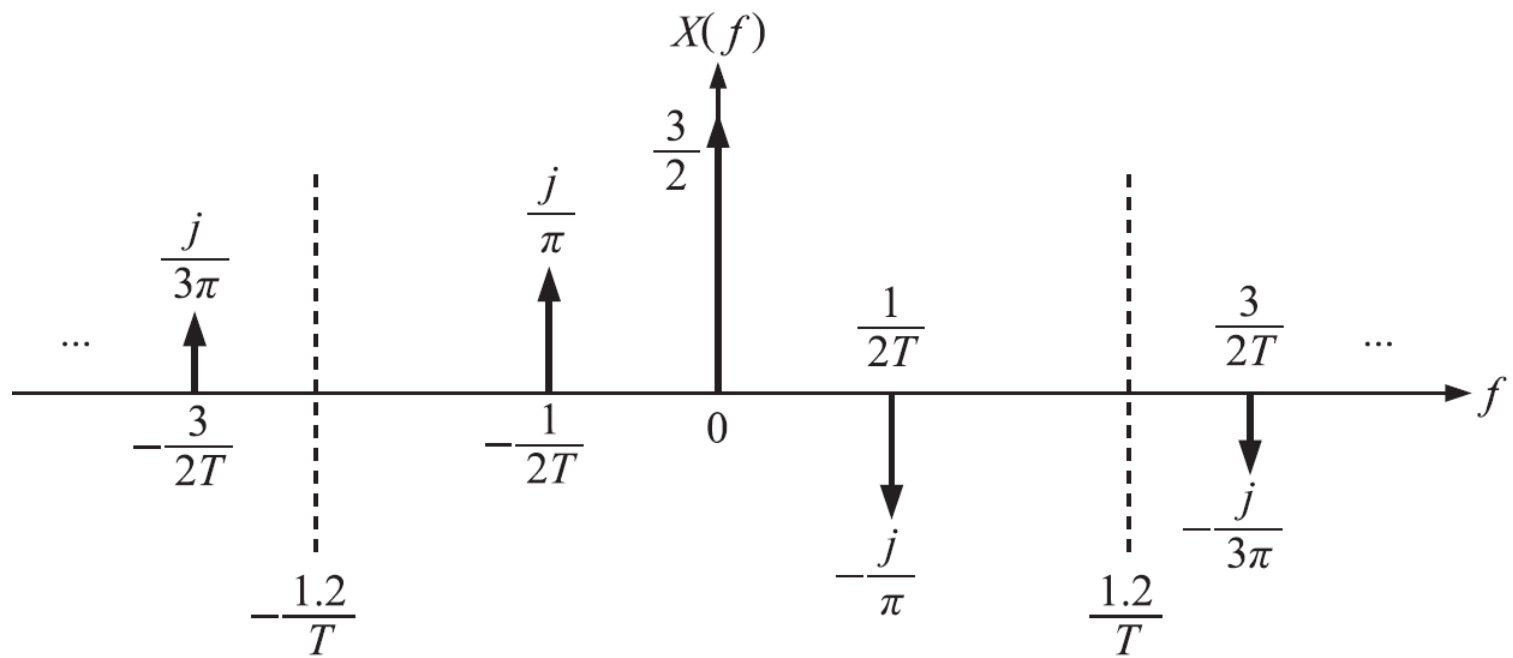


圖 3-70

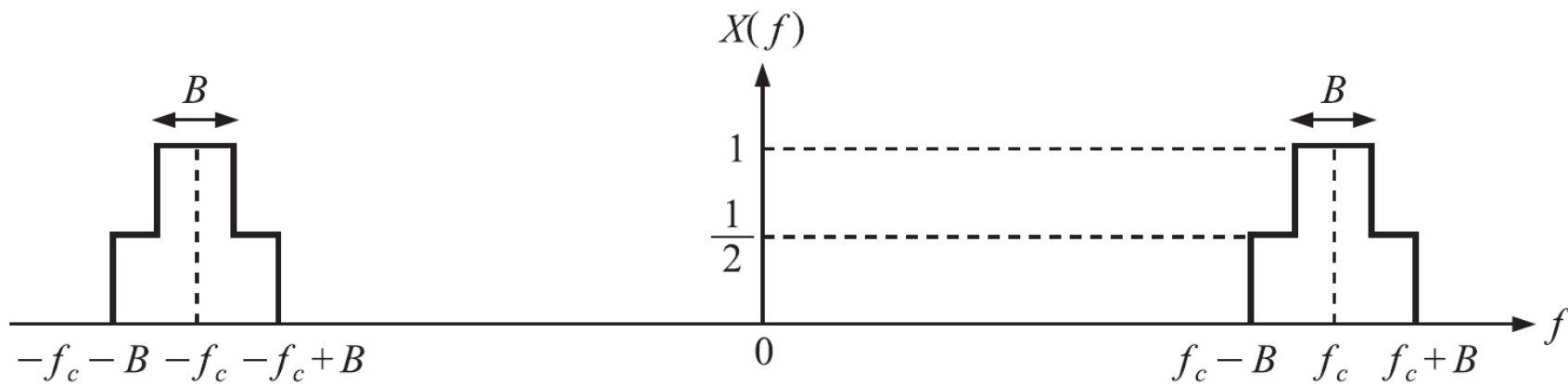


圖 3-71

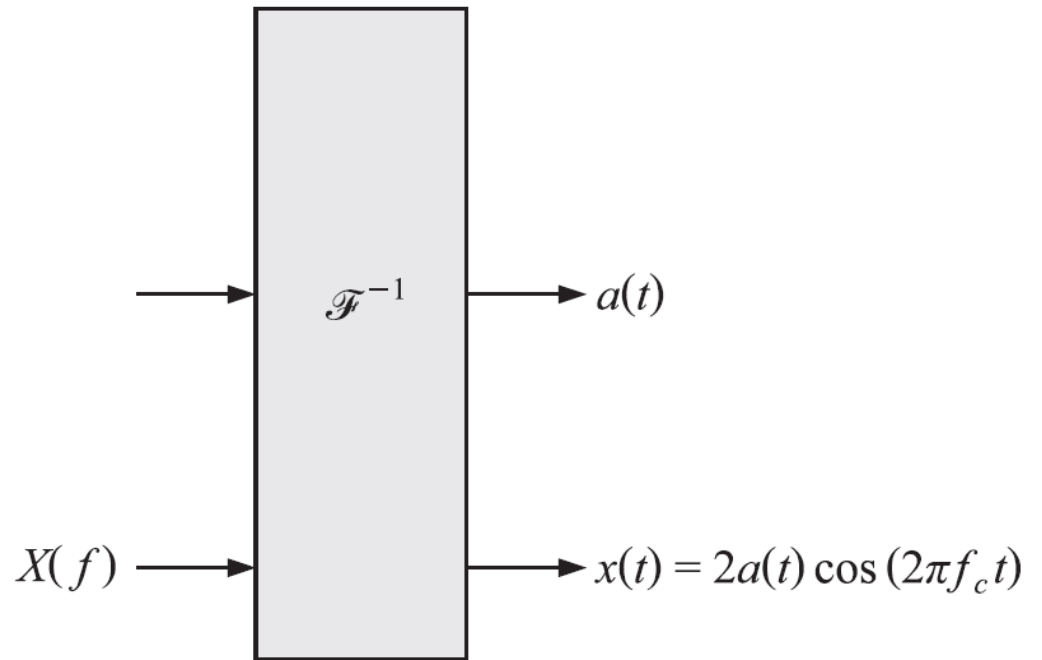
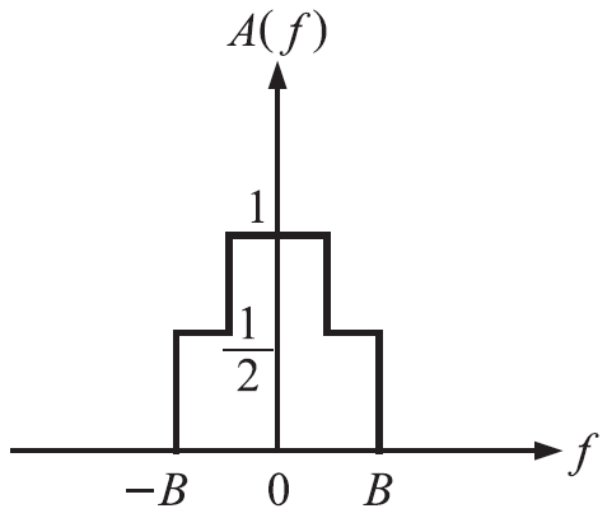


圖 3-72

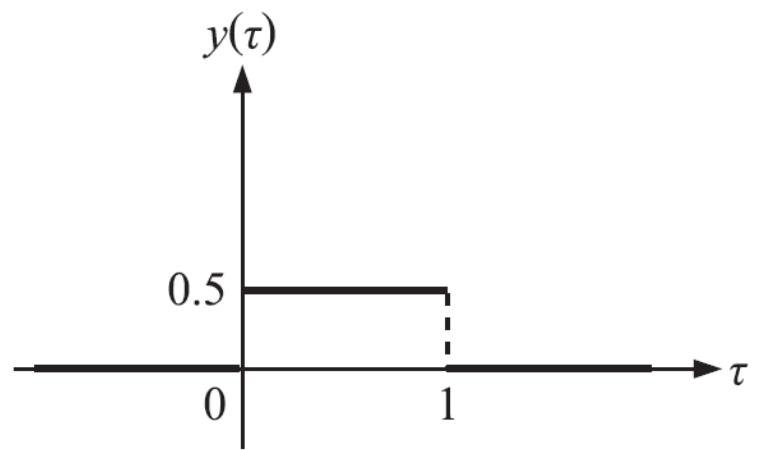
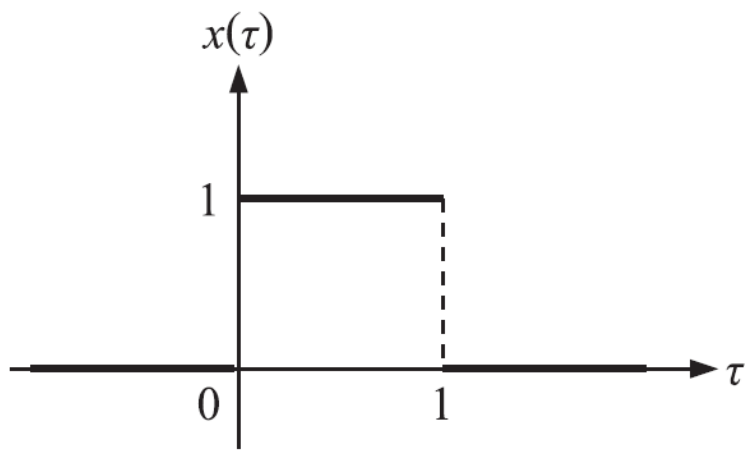


圖 3-73

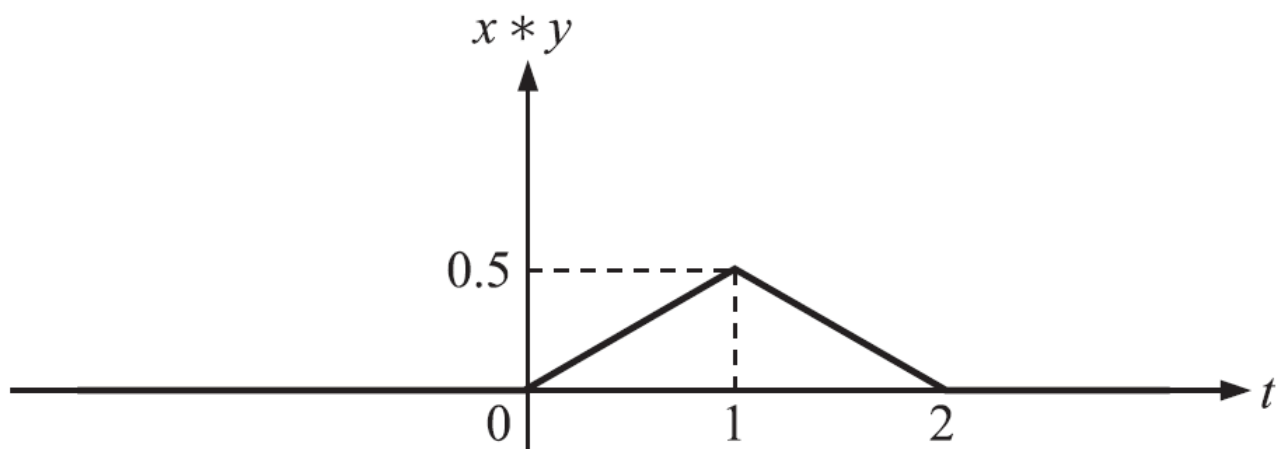


圖 3-74

例題 3-42
EXAMPLE

The message $m(t)$, whose spectrum is shown in Fig. 3-75, is passed through the system in the same figure. The bandpass filter has a bandwidth of $2W$ centered at f_0 , where $f_0 \gg W$, and the lowpass filter has a bandwidth of W .

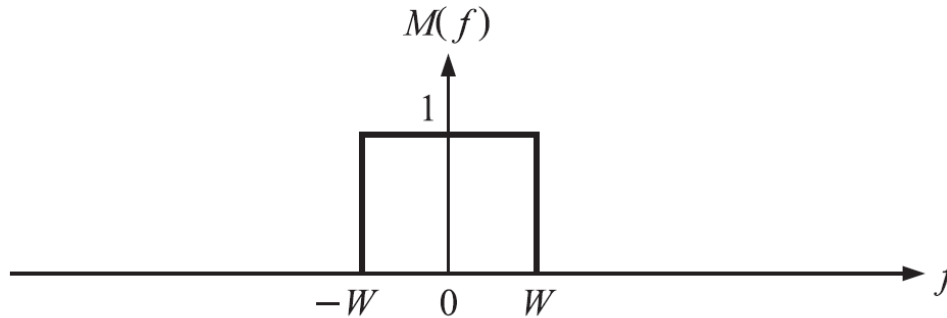
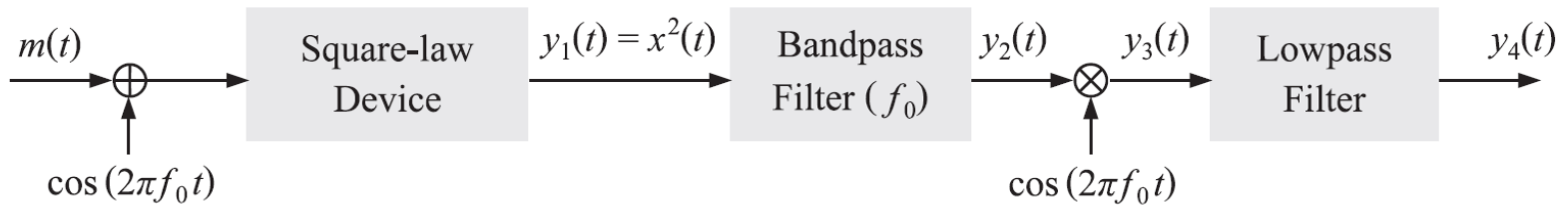


圖 3-75

(1) Find the spectra of the signals $x(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ and $y_4(t)$.

(2) Plot the spectra of the signals $x(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ and $y_4(t)$.

解 (1) 觀察知 $x(t) = m(t) + \cos(2\pi f_0 t)$, $M(f) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$, 故

$$X(f) = M(f) + \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) + \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x^2(t) = m^2(t) + 2m(t) \cos(2\pi f_0 t) + \cos^2(2\pi f_0 t) \\ &= m^2(t) + 2m(t) \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2}[1 + \cos(4\pi f_0 t)] \end{aligned}$$

且 $\mathfrak{F}\{m^2(t)\} = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) * \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) = 2W\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$

故 $Y_1(f) = 2W\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_0}{2W}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{2W}\right) + \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}[\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)]$

又由 Bandpass 知

$$Y_2(f) = \Pi\left(\frac{f-f_0}{2W}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{2W}\right), \text{ 故 } y_2(t) = 2m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

又 $y_3(t) = y_2(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = 2m(t) \cos^2(2\pi f_0 t) = m(t)[1 + \cos(4\pi f_0 t)]$, 故

$$Y_3(f) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) + \frac{1}{2}\left[\Pi\left(\frac{f-2f_0}{2W}\right) + \Pi\left(\frac{f+2f_0}{2W}\right)\right]$$

通過 Lowpass Filter 知

$$Y_4(f) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right), \text{ 故 } y_4(t) = m(t)$$

(2) $X(f)$, $Y_1(f)$ 與 $Y_2(f)$ 如圖 3-76 所示。

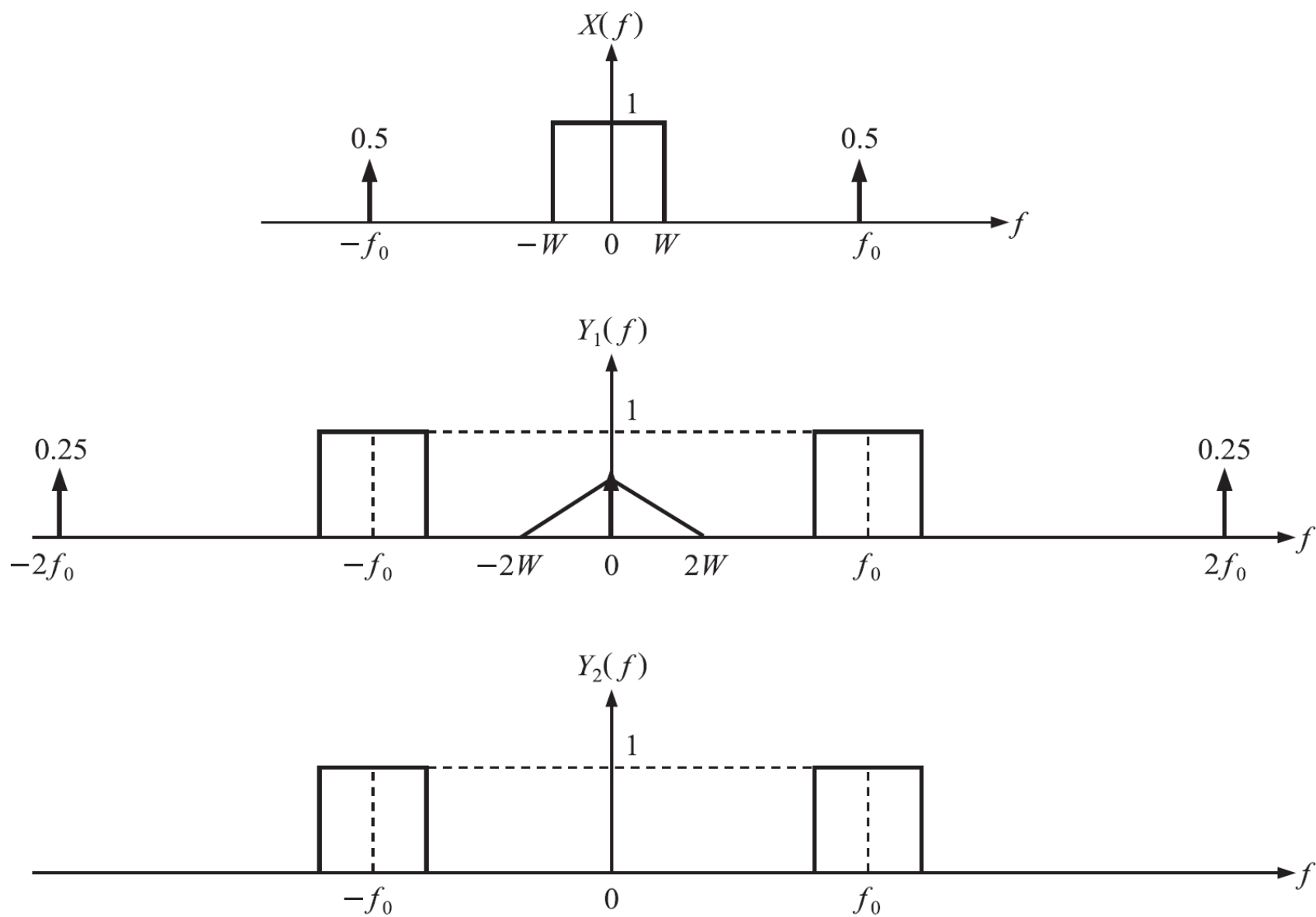


圖 3-76

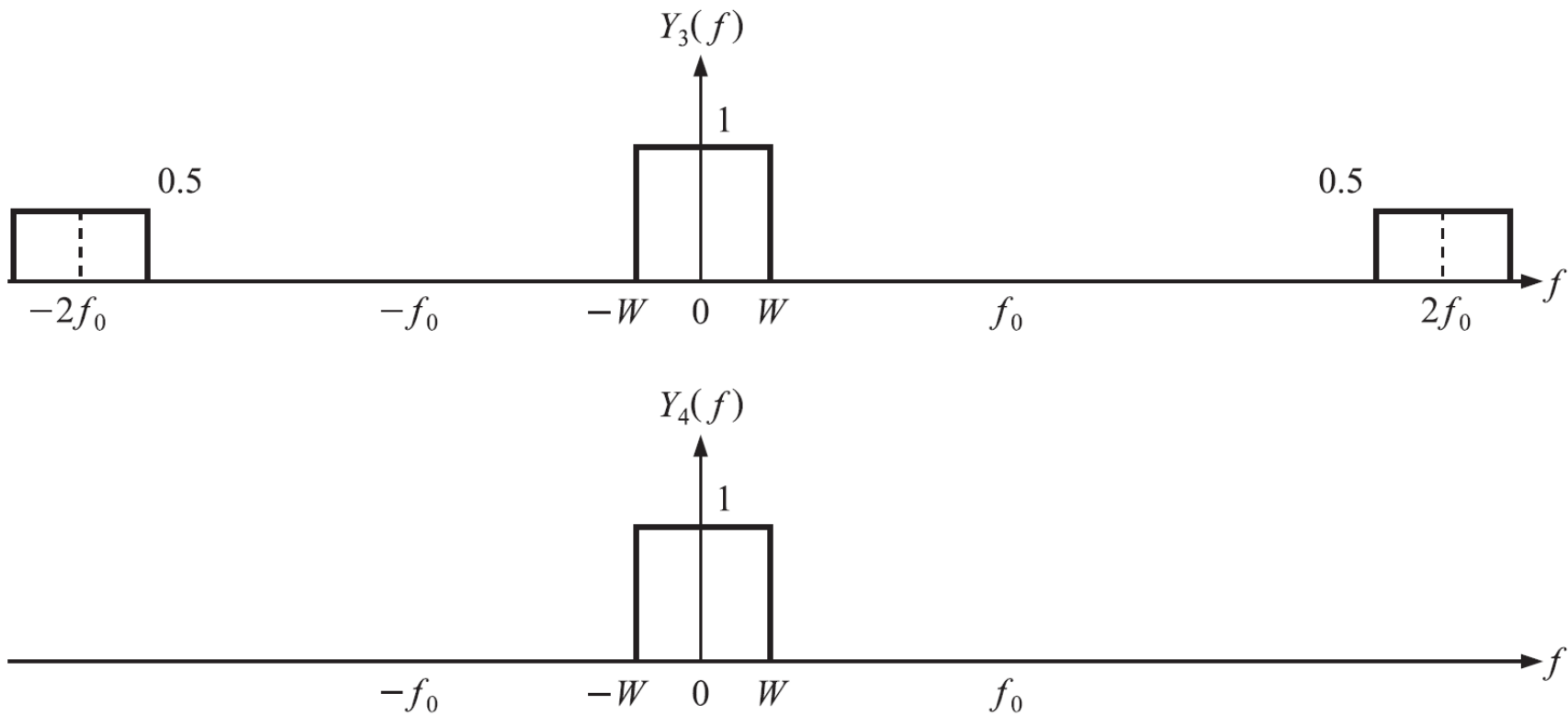


圖 3-76 (續)

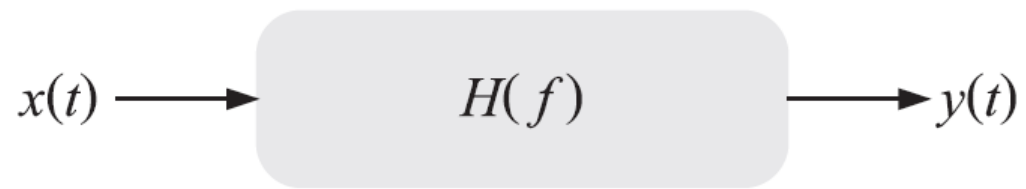


圖 3-77



例題 3-48
EXAMPLE

$$h(t) = \begin{cases} A \exp(-at), & t \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (1) Find $H(f)$.
- (2) Find $y(t) = \exp(j2\pi f_0 t) * h(t)$.

解

$$(1) H(f) = \int_0^{\infty} A \exp(-at) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

$$(2) Y(f) = H(f)\delta(f - f_0), \text{ 故 } y(t) = \int Y(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{A}{a + j2\pi f_0} e^{j2\pi f_0 t}$$



例題 3-49
EXAMPLE

Find the Fourier Transform of $e^{-|t|} \cos 5t$.

解 $F\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$, $\cos 5t = \frac{1}{2}(e^{j5t} + e^{-j5t})$, 故

$$F\{e^{-|t|} \cos 5t\} = \frac{1}{2} \left[X\left(f - \frac{5}{2\pi}\right) + X\left(f + \frac{5}{2\pi}\right) \right]$$

$x(t)$ 如圖 3-78 所示，求：

(1) Find $X(0)$.

(2) Find $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$.

(3) Find $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$.

(4) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$.

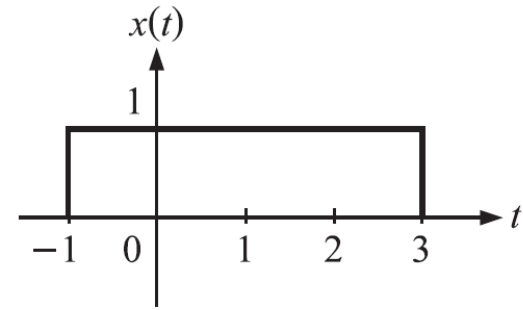


圖 3-78

解

$$(1) \quad x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right)$$

$$X(f) = 4 \text{sinc}(4f) e^{-j2\pi f} \Rightarrow X(0) = 4$$

$$(2) \quad \text{因 } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = x(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi$$

$$(3) \quad \text{原式} : 2\pi \cdot x(t) * \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_{t=2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \text{rect}\left(\frac{2-\tau}{2}\right) d\tau = 2 \times 2\pi = 4\pi$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 8\pi$$

Given signal $x(t) = \cos(2000\pi t)$:

- (1) Let $y(t)$ be the time-domain waveform obtained by truncating $x(t)$ by multiplying it with $h(t) = \Pi(1000t)$. Given the spectrum $Y(f)$ of $y(t)$.
- (2) Let $z(t)$ be the time-domain waveform obtained by sampling $y(t)$ using a unit gain sampling function with sampling frequency $f_s = 3000$. Given the spectrum $Z(f)$ of $z(t)$.

解

$$(1) Y(f) = \frac{1}{2000} \left[\text{sinc} \left(\frac{f - 1000}{1000} \right) + \text{sinc} \left(\frac{f + 1000}{1000} \right) \right]$$

$$(2) \text{ 即乘上脈衝串 } \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(t - \frac{n}{3000} \right), \text{ 所以 } \mathfrak{F}\{\delta_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3000\delta(f - 3000n), \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{z(t)\} &= \frac{1}{2000} \left[\text{sinc} \left(\frac{f - 1000}{1000} \right) + \text{sinc} \left(\frac{f + 1000}{1000} \right) \right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3000\delta(f - 3000n) \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{f - 1000 - 3000n}{1000} \right) + \text{sinc} \left(\frac{f + 1000 - 3000n}{1000} \right) \end{aligned}$$



例題 3-57
EXAMPLE

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c(t) dt$ (hint : 面積定理)

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2(\tau f) df$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\alpha^2 + (2\pi f)^2]} df$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin c^4(\tau f) df$ (hint : Parseval 定理)

解 (1) 1

(2) $\frac{1}{2\alpha}$

(3) $\frac{1}{\tau}$

(4) $\frac{1}{\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda^2\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{2}{\tau^2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 dt = \frac{2}{3\tau}$



例題 3-59
EXAMPLE

Consider the signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin^2(4\pi f_0 t)$:

- (1) Find its complex Fourier series.
- (2) Find and plot the power spectral density.
- (3) Find its average power.

解 (1) $X_0 = X_1 = X_{-1} = \frac{1}{2}, X_4 = X_{-4} = -\frac{1}{4};$ (2) 略; (3) $\frac{7}{8}$



例題 3-61
EXAMPLE

Consider the signal $x(t) = 40 \sin c(20t)$:

(1) Find its Fourier transform.

(2) Find and plot the energy spectral density.

(3) Find the total energy.

解 (1) $2\Pi\left(\frac{f}{20}\right)$; (2) $4\Pi\left(\frac{f}{20}\right)$; (3) 80

3-4 線性非時變系統

一、基本定義

1. 有輸入函數與輸出函數即稱為**系統 (System)**，如圖 3-80 所示。每個系統有其不同的特性，即其性能函數或稱運算系統函數為 $H()$ ，則輸出為 $y(t) = H[x(t)]$ 。



圖 3-80

2. **線性 (Linear)**：

$$H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1H[x_1(t)] + a_2H[x_2(t)]$$

3. **非時變 (Time-Invariant)**：當輸入訊號的時間延遲或時間領先，都會導致系統之輸出訊號有相同的時間平移，即稱為**非時變系統**，這說明了：無論輸入訊號是何時輸入到系統，非時變系統的輸出僅有時間平移 (即圖形左、右移而已)。非時變系統之方塊示意圖如圖 3-81，以 O.D.E. 來看，屬於「常係



圖 3-81

4. **線性非時變系統 (Linear Time-Invariant System, LTI)**：即系統同時具有線性且非時變之兩種特性，在通訊系統裡是最常見的系統。一個 LTI 系統有如下重要的特性：若輸入 $\delta(t)$ 得到之輸出為 $h(t)$ ，即存在 $h(t) = H[\delta(t)]$ ，稱 $h(t)$ 為**脈衝響應函數 (Impulse Response Function)** 或僅稱**脈衝響應**。現輸入 $x(t)$ 後，則輸出為 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

證明 由過濾性質配合線性性質知

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

由非時變知

$$H[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau)$$

故

$$\begin{aligned} y(t) &= H[x(t)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H[\delta(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (\text{得證}) \end{aligned}$$



圖 3-82



-
5. **因果與非因果 (Causal and Noncausal) 系統**：或稱**具體與期待 (Physical and Anticipative) 系統**。一個系統在任意時刻的輸出只與「現在」或「過去」的輸入有關，即稱此系統為**因果系統 (Causal System)**；相反的，若一個系統在任意時刻的輸出取決於一個或一個以上的未來訊號，即稱此系統為**非因果系統 (Noncausal System)**。例如：

$$y(t) = x(\sin(t)) : \text{非因果}$$

因為「非因果」表示含未來 [即需**等待 (Wait)**]，故因果性的另一種意義為：因果系統代表可以**立即確實 (Real Time)** 運作的系統 (不需等待之意)，屬於可以**實現 (Realizable)** 之系統。因此在一個因果系統下輸入函數為 $x(t)$ ，若 $x(t) = 0$ for $t < 0$ ，則依因果系統之意義知其輸出可表為 $y(t) = H[x(t)] = 0$ for $t < 0$ 。據此可以得到如下之性質：

- (1) 若任一個函數 $x(t)$ 滿足 $x(t) = 0$ for $t < 0$ ，稱 $x(t)$ 為**因果函數 (Causal Function)**。一般可**信賴 (即可實現)** 的系統皆為因果系統。
- (2) 在 LTI、因果系統下，**脈衝響應函數**必有 $h(t) = 0$ for $t < 0$ 。
- (3) 在 LTI、因果系統下，則 $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$ 。

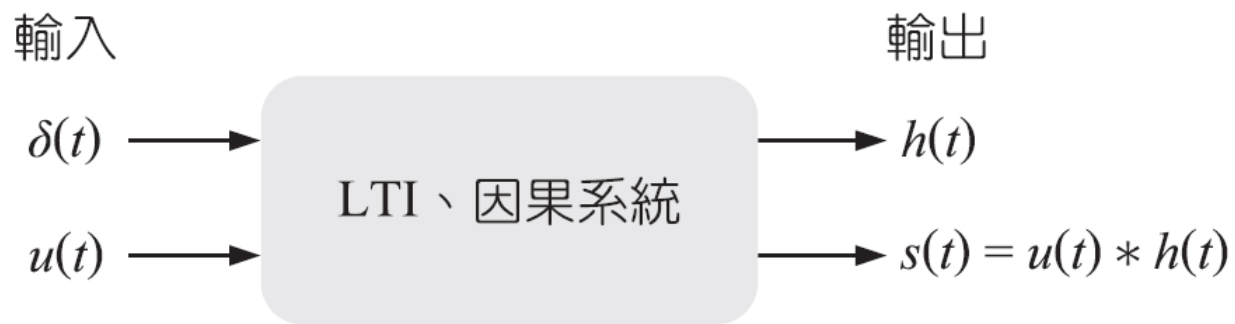


圖 3-83

6. **穩定與不穩定 (Stable and Unstable) 系統**：如果一個系統對一個有界的輸入所導致的輸出仍為有界 (Bounded-Input, Bounded-Output Stable, BIBO Stable)，即稱系統是**穩定的 (Stable)**；不滿足穩定的即為**不穩定系統**。例如：

$$y(t) = tx(t) : \text{不穩定}$$

$$y(t) = e^{x(t)} : \text{穩定}$$

性質 在 LTI 下，一個系統是穩定 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ 。

說明：因為在 LTI 下有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

令 $|x(t)| \leq M$ ， M 為某一個正數，故

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t - \tau)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| M d\tau \\ &= M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

因此只要 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ ，輸出 $y(t)$ 即為有界。

7. **記憶與無記憶 (Memory and Memoryless) 系統**：或稱**動態 (Dynamic)** 與**瞬時 (Instantaneous)** 系統。若系統的輸出訊號取決於「過去」或「未來」的輸入訊號，則稱此系統具有**記憶 (Memory)**；即記憶系統會「保留」或「儲存」現在時刻外的輸入訊號。記憶系統之物理意義為：會儲存能量之元件。相反的，若系統的輸出訊號僅取決於「目前」輸入訊號的值，則稱此系統**無記憶 (Memoryless)**；即無記憶系統不會「保留」或「儲存」現在時刻外的輸入訊號。例如：

(1) $y(t) = kx(t - 2)$ ，產生“Delay”（相當於平移）：記憶（含過去）。

(2) $y(t) = kx(t + 2)$ ：記憶（含未來）。

(3) $y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ，如電容器：記憶（含過去）。

(4) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n - 1] + x[n] + x[n + 1])$ ：記憶（含過去與未來）。

(5) $y(t) = kx(t)$ ，產生「放大」：無記憶（僅含現在）。

(6) $y(t) = x(t)$ ，恆等系統，如電阻：無記憶（僅含現在）。

(7) $y(t) = x^2(t)$ ：無記憶（僅含現在）。

性質 在 LTI 下，一個系統是無記憶 $\Leftrightarrow h(t) = c\delta(t)$ 。

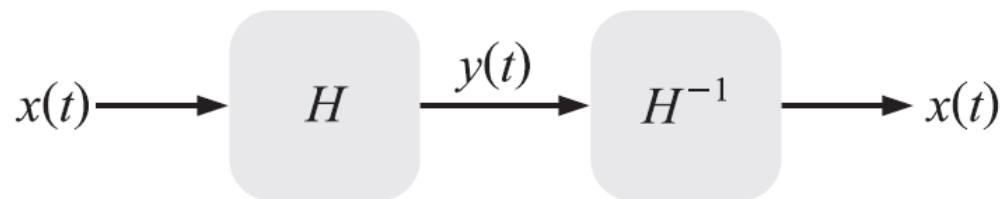


圖 3-84

Assume that the relationship between the input signal $x(t)$ and output signal $y(t)$ of a linear time-invariant (LTI) system is given by $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2(t-\alpha)} x(\alpha - 1) d\alpha$.

- (1) Find the impulse response $h(t)$ of this system.
- (2) Is this system causal? Why?
- (3) Is this system stable? Why?

解 (1)
$$h(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2(t-\alpha)} \delta(\alpha - 1) d\alpha$$

$$= \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t > 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases} \quad (\text{如圖 3-85 所示})$$

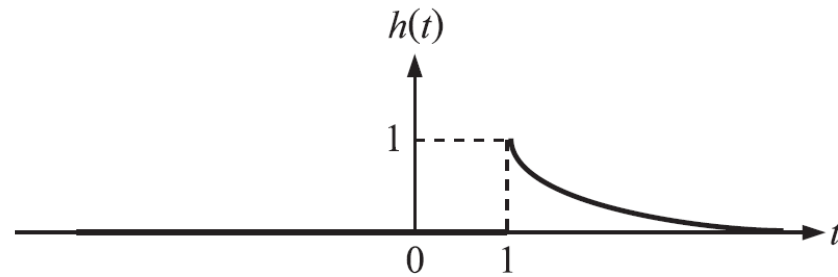


圖 3-85

(2) 因果，因為當 $t < 0$ 有 $h(t) = 0$ 。

(3) 穩定，因為 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_1^{\infty} e^{-2(t-1)} dt = \frac{1}{2} < \infty$ 。

二、LTI 系統之頻域分析

當系統較複雜時，前面所談之時域分析變得較困難，因此常轉換到頻域進行分析。

1. 在 LTI 系統下，輸出為

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

取 Fourier 變換得 $Y(f) = X(f)H(f)$ ，稱 $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ 為此系統之**轉移函數** (Transfer Function)，如圖 3-86 所示。

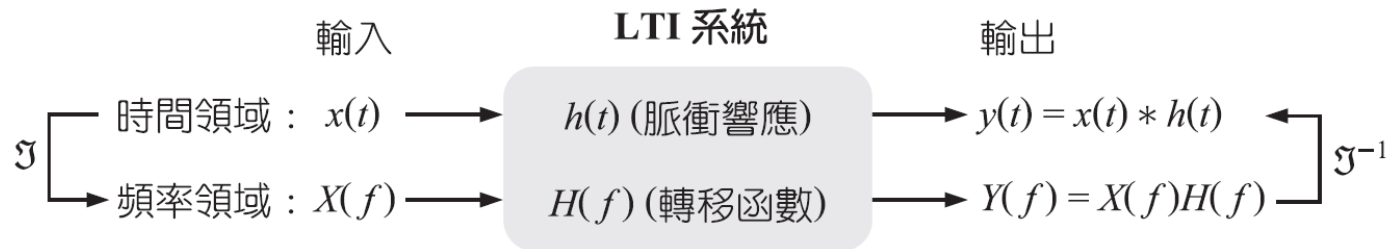


圖 3-86

即將 $H(f)$ 視為在不同頻率時系統具有的「加權函數」，亦稱為此系統的**系統函數** (System Function)，藉此觀念使訊號與系統之分析簡單化，可有效描述系統的特性。

2. 又由

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= H_R(f) - jH_I(f) = |H(f)|e^{j\phi(f)} = |H(f)|e^{j\angle H(f)} \end{aligned}$$

其中 $|H(f)| = \sqrt{H_R^2(f) + H_I^2(f)}$ ，稱爲「量」(Gain) 或振幅響應，且 $|H(f)| = |H(-f)|$ ：爲偶函數。 $\phi(f) = \angle H(f) = \tan^{-1}\left(-\frac{H_I(f)}{H_R(f)}\right)$ ，稱爲相位響應，且 $\phi(f) = \phi(-f)$ ：爲奇函數。

3. (1) 若 $x(t)$ 為能量訊號，則由 $Y(f) = H(f)X(f)$ 。令

$G_X(f) \equiv |X(f)|^2$: $x(t)$ 之能量頻譜密度函數

$G_Y(f) \equiv |Y(f)|^2$: $y(t)$ 之能量頻譜密度函數

則 $G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$ 。

(2) 若 $x(t)$ 為功率訊號，則由 $Y(f) = H(f)X(f)$ 。令

$S_X(f) \equiv |X(f)|^2$: $x(t)$ 之功率頻譜密度函數

$S_Y(f) \equiv |Y(f)|^2$: $y(t)$ 之功率頻譜密度函數

則 $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ 。



例題 3-65
EXAMPLE

A signal $x(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{3}\right)$ is input to a filter whose impulse response is $h(t) = \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$. Sketch and label the output $y(t)$ of the filter?



例題 3-66
EXAMPLE

Consider the inputs signal $x(t) = 2 \cos(2\pi t) + 3 \sin(6\pi t) + 4e^{j8\pi t}$, and the LTI system with impulse response $h(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$. Derive the output signal $y(t)$.

For a linear system as shown in Fig. 3-87:

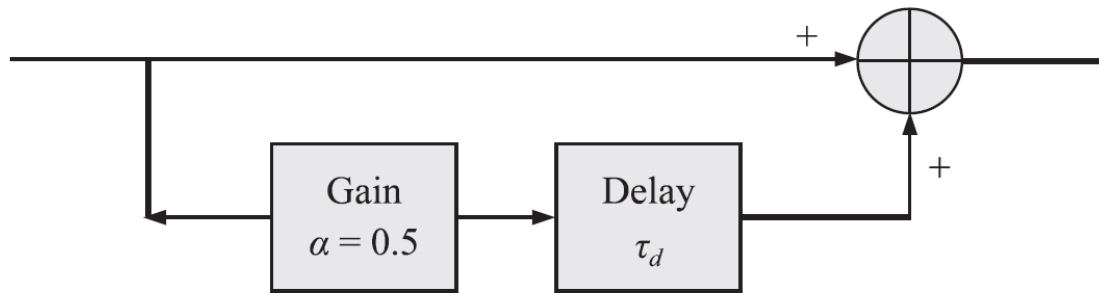


圖 3-87

- (1) What are its impulse response and transfer function ?
- (2) How do you construct a receiver to completely recover a signal $m(t)$ from the output of the linear system when $m(t)$ is its input ?

解 (1) $h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - \tau_d)$, 故

$$H(f) = 1 + 0.5 \exp(-j2\pi f\tau_d)$$

(2) $H_{eq}(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 + 0.5k}$, where $k = \exp(-j2\pi f\tau_d)$, 故

$$H_{eq}(f) = 1 - 0.5k + (0.5)^2k^2 - + \dots$$

令 $\Delta = \tau_d$, c_1, c_2, \dots 為 Tapped-Delay Line (TDL) 之係數

$$\Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -0.5, c_3 = (0.5)^2, \dots$$



例題 3-72
EXAMPLE

The output signal $y(t)$ of a system is given by

$$y(t) = \int_{t-t_1}^{t-t_2} x(\tau) d\tau$$

(1) Find the impulse response of the system.

(2) If $x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$, find the energy spectral density, autocorrelation function and the total energy of $x(t)$.

解

$$(1) h(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{t_1 + t_2}{2}}{t_1 - t_2}\right)$$

$$(2) x(t) = 2 \text{sinc}(2t) \Rightarrow X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right), \quad G_X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right), \quad E = 2$$



例題 3-75
EXAMPLE

The Fourier transform of a signal $x(t)$ is sketched in Fig. 3-88.

- (1) What is $x(0)$?
- (2) Sketch the energy spectral density of $x(t)$.

(3) What is the energy content of $x(t)$?

解 此訊號為能量訊號！(因能量訊號直接取 Fourier 變換)

(1) 依據面積定理得

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = \frac{(2+3) \cdot 2}{2} = 5$$

(2) $x(t)$ 之能量頻譜密度函數為 $G(f) = |X(f)|^2$ ，

圖形如圖 3-89。

$$\begin{aligned} (3) E &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \\ &= 2 \left[\int_0^1 4 df + \int_1^{1.5} (-4f+6)^2 df \right] \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

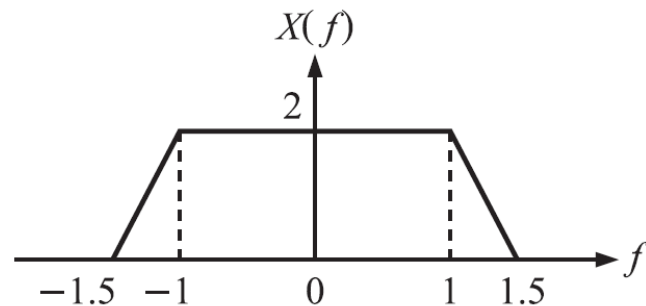


圖 3-88

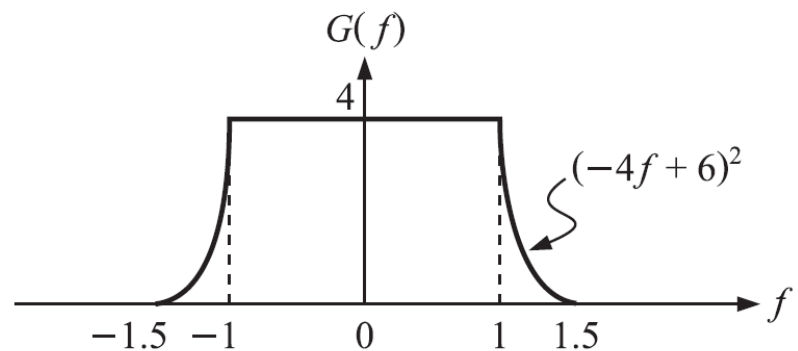


圖 3-89



例題 3-77
EXAMPLE

Consider a LTI system with impulse response $h(t) = \frac{\sin[4(t-1)]}{\pi(t-1)}$. Determine the output of the system for each of the following input:

(1) $x_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)$

(3) $x_3(t) = \frac{\sin[4(t+1)]}{\pi(t+1)}$

解 先將 $h(t)$ 整理為

$$h(t) = \frac{\sin[4(t-1)]}{\pi(t-1)} = \frac{4}{\pi} \frac{\sin\left[\pi \cdot \frac{4}{\pi}(t-1)\right]}{\pi \cdot \frac{4}{\pi}(t-1)} = \frac{4}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{4}{\pi}(t-1)\right]$$

則 $H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\} = \Pi\left(\frac{f}{\frac{4}{\pi}}\right) e^{-j2\pi f}$ 。

$$(1) \text{ 因為 } X_1(f) = \mathfrak{F}\{x_1(t)\} = \mathfrak{F}\{-\sin(6t)\} = \frac{1}{2j} \left[-\delta\left(f - \frac{6}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{6}{2\pi}\right) \right]$$

所以 $Y_1(f) = X_1(f)H(f) = 0$ ，故 $y_1(t) = 0$ 。

$$(2) \text{ 因為 } X_2(f) = \mathfrak{F}\{x_2(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}\sin 3t + \frac{1}{4}\sin 6t + \dots\right\}$$
$$= \frac{1}{4j} \left[\delta\left(f - \frac{3}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{3}{2\pi}\right) \right] + \frac{1}{8j} \left[\delta\left(f - \frac{6}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{6}{2\pi}\right) \right] + \dots$$

$$\text{所以 } Y_2(f) = X_2(f)H(f) = \frac{1}{4j} \left[\delta\left(f - \frac{3}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{3}{2\pi}\right) \right] \left(\frac{f}{\pi} \right) e^{-j2\pi f}$$
$$= \frac{1}{4j} \left[\delta\left(f - \frac{3}{2\pi}\right) e^{-3j} - \delta\left(f + \frac{3}{2\pi}\right) e^{3j} \right]$$

$$\text{故 } y_2(t) = \frac{1}{4j} e^{-3j} e^{3jt} - \frac{1}{4j} e^{3j} e^{-3jt}。$$

$$(3) \text{ 因為 } X_3(f) = \mathfrak{F}\{x_3(t)\} = \Pi\left(\frac{f}{\frac{4}{\pi}}\right) e^{j2\pi f}，\text{ 所以 } Y_3(f) = X_3(f)H(f) = \Pi\left(\frac{f}{\frac{4}{\pi}}\right)，$$

$$\text{故 } y_3(t) = \frac{4}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{4}{\pi}t\right)。$$

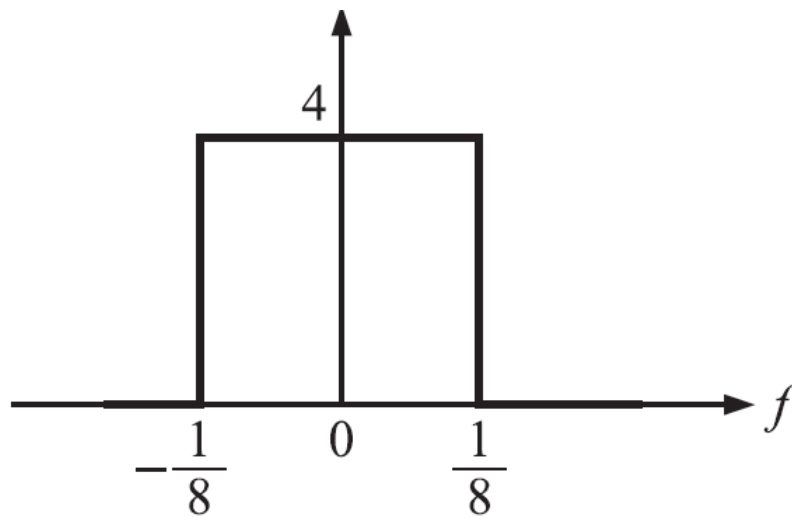


圖 3-90

As shown in Fig. 3-91 a signal $x(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{3}\right)$ is input to a filter whose impulse response is $h(t) = \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$. What is the output $y(t)$ of the filter? Make sure to sketch and label the output.

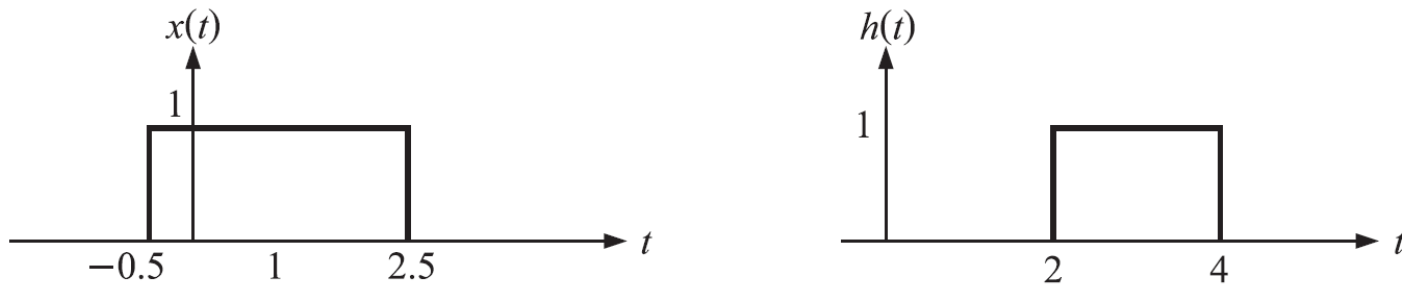


圖 3-91

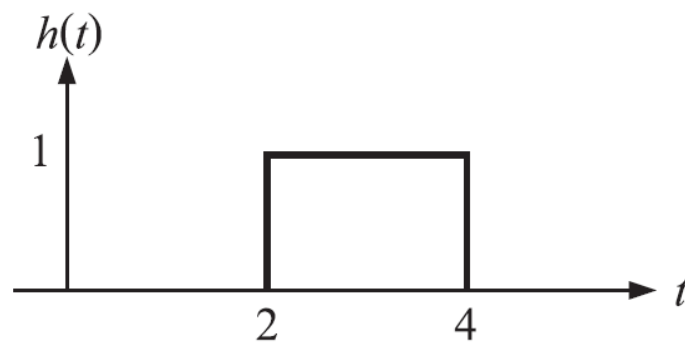
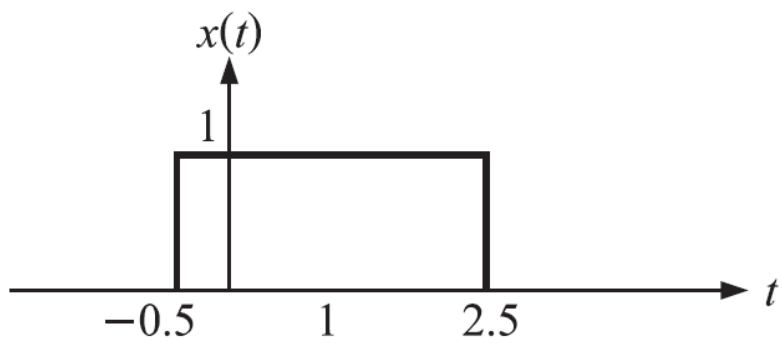


圖 3-91

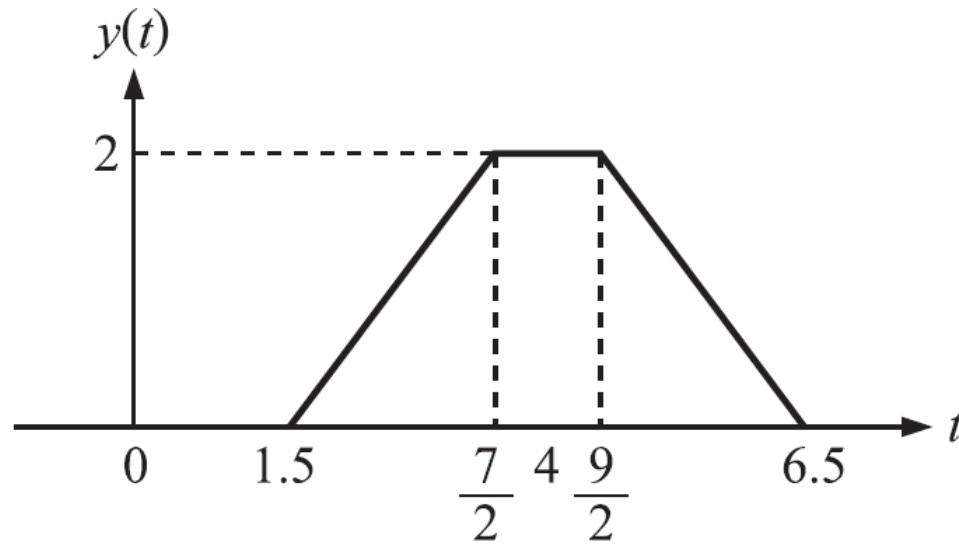


圖 3-92



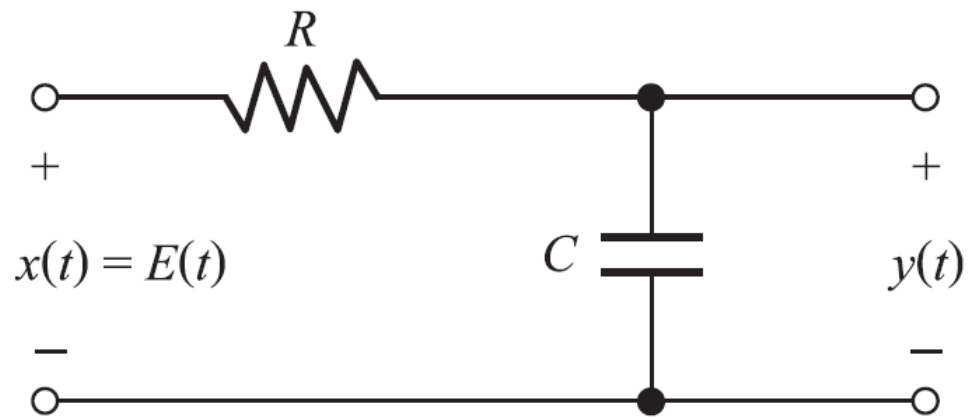
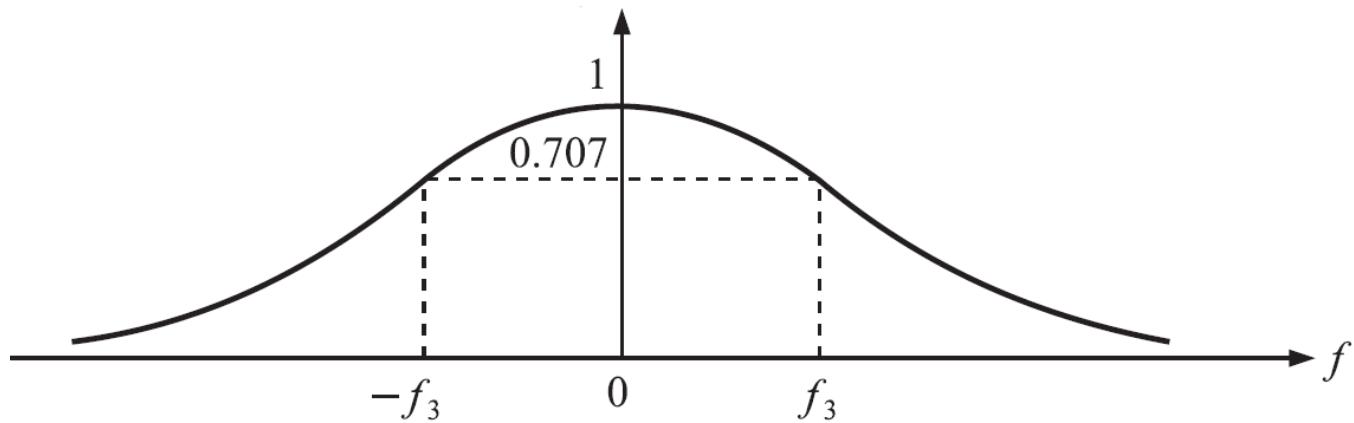


圖 3-93



$$\phi(f) = -\tan^{-1}(2\pi fRC)$$

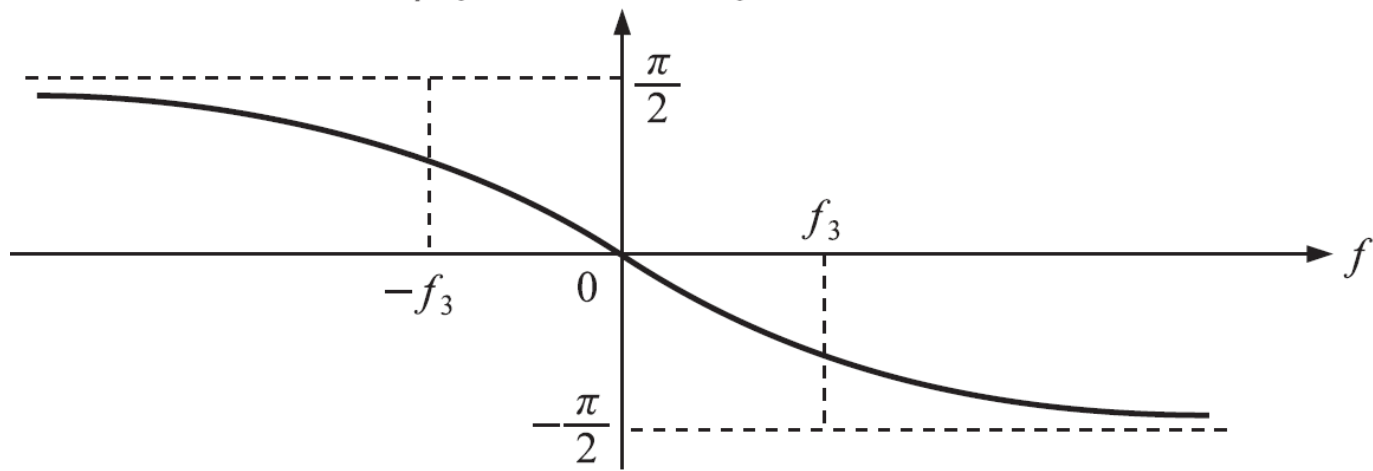


圖 3-94

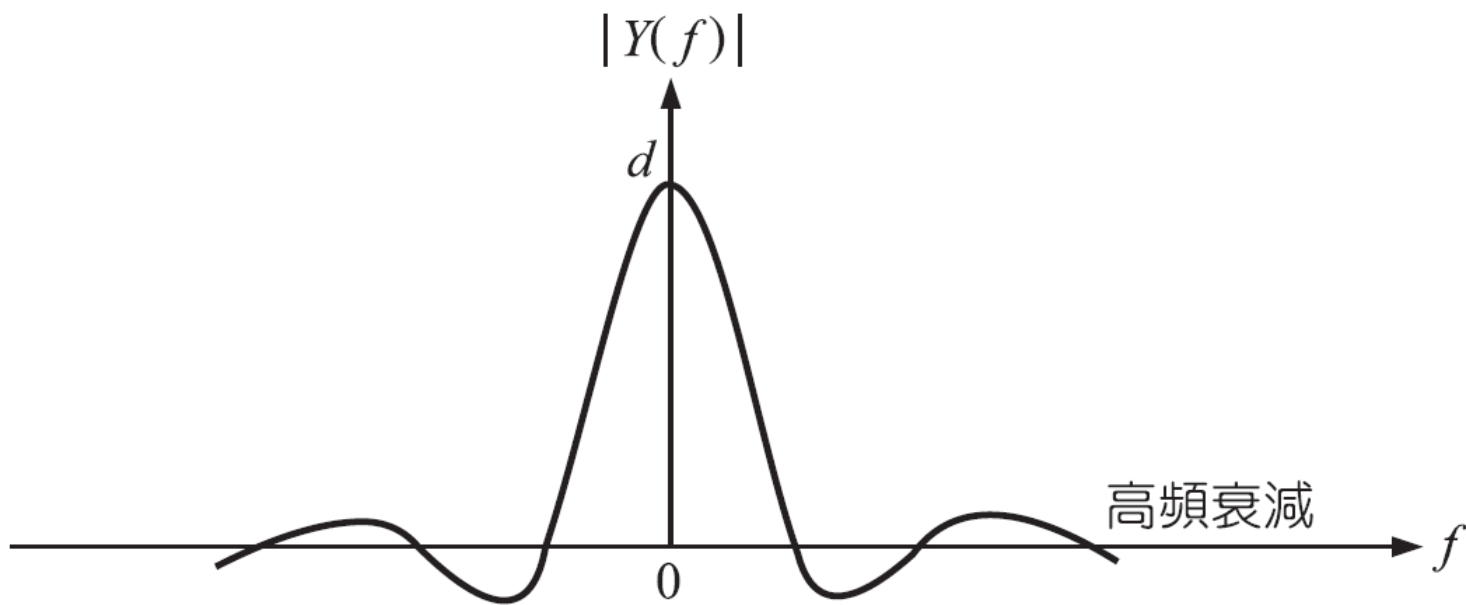


圖 3-95

三、無失真 (Distortionless) 傳輸

所謂無失真傳輸，意即輸出之**波形** (Waveform) $y(t)$ 與原輸入之波形 $x(t)$ 相同，但容許振幅不同與固定的時間延遲！如圖 3-96 所示。

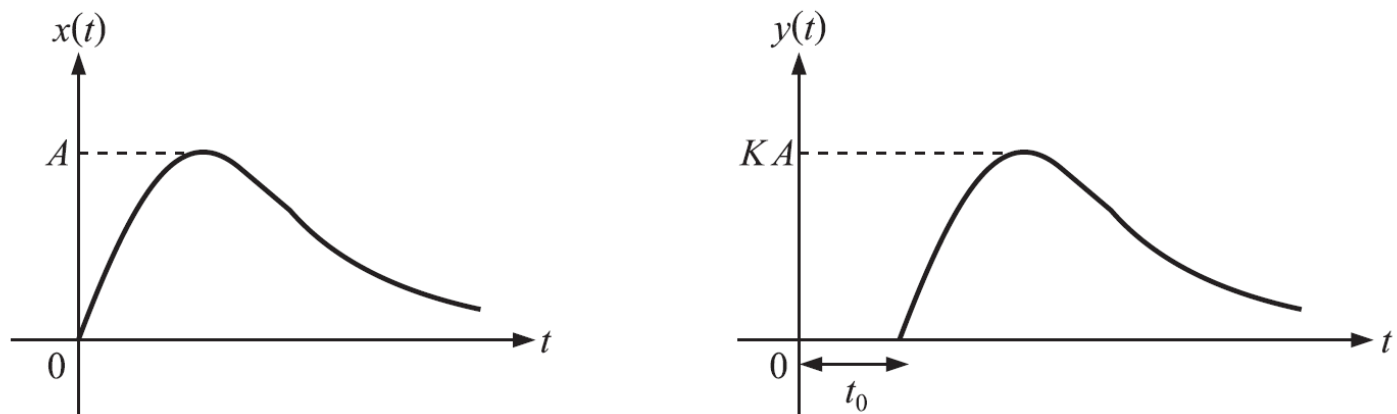


圖 3-96

因此由圖 3-96 可知 $y(t) = Kx(t - t_0)$ ，其中 K, t_0 ：兩正數。設 $\mathfrak{F}\{x(t)\} = X(f)$ ，則

$$\mathfrak{F}\{y(t)\} = \mathfrak{F}\{Kx(t - t_0)\} = Ke^{-j2\pi ft_0} X(f) = Y(f)$$

因此無失真傳輸系統的轉移函數為

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ke^{-j2\pi ft_0}$$

即 $|H(f)| = K$ ，與 f 無關 (常數)，即「常數振幅響應」。 $\angle H(f) = -2\pi ft_0$ 為 f 之常數倍，即「負的線性相位平移」。如圖 3-97 所示。

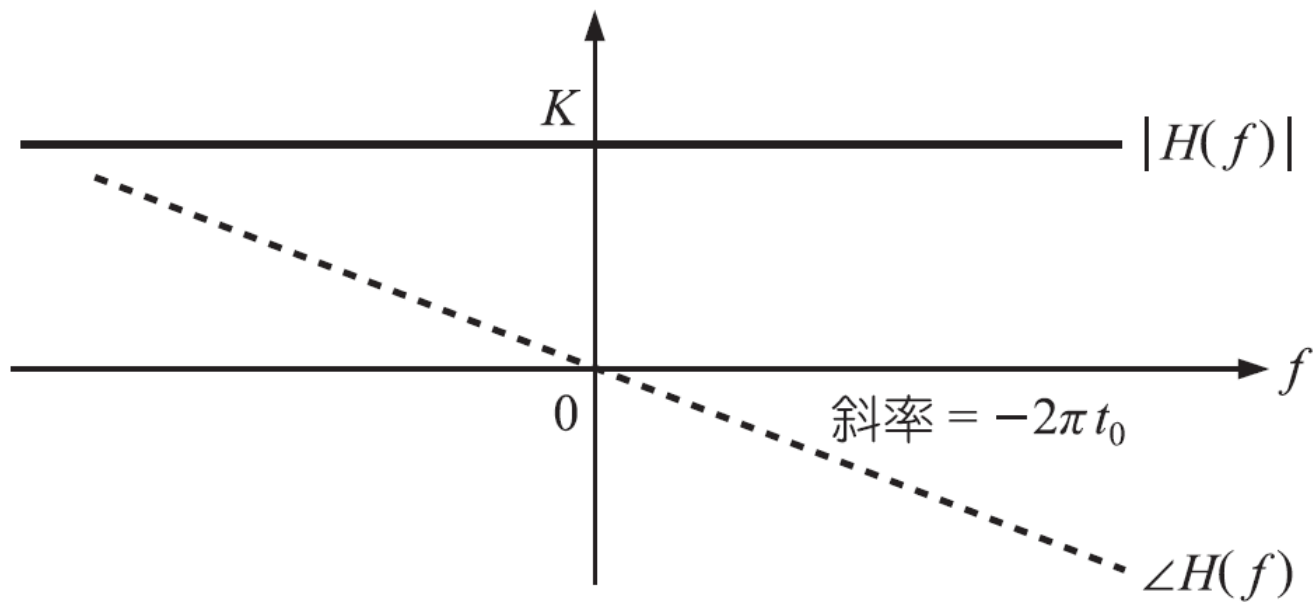


圖 3-97

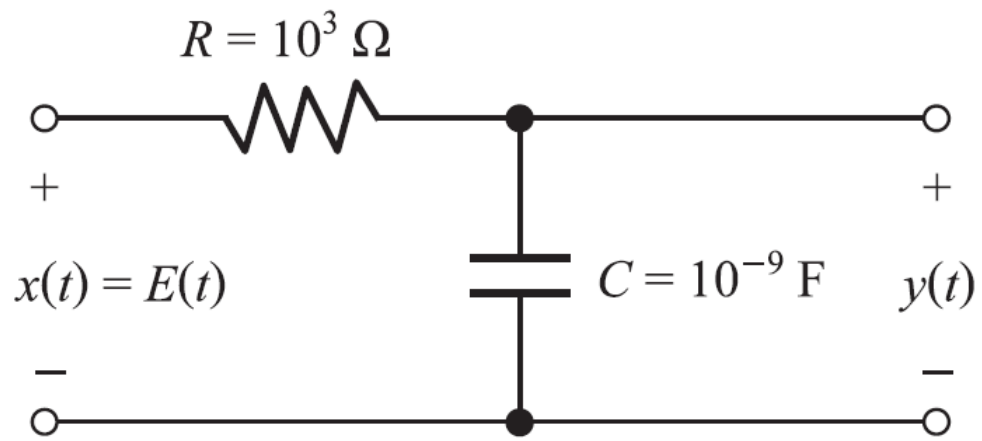


圖 3-98

理想不失真低通濾波器之轉移函數定義為

$$H(f) = \begin{cases} Ke^{-j2\pi ft_0}, & |f| < f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

其中 f_c 為**截止 (Cut-Off)** 頻率。若配合頻寬之觀念，假設 B 為此理想濾波器之頻寬，即 $B = f_c$ ，則低通濾波器之頻率響應為可以用方波函數表示為

$$H_{LP}(f) = K\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-j2\pi ft_0}$$

如圖 3-99 所示。

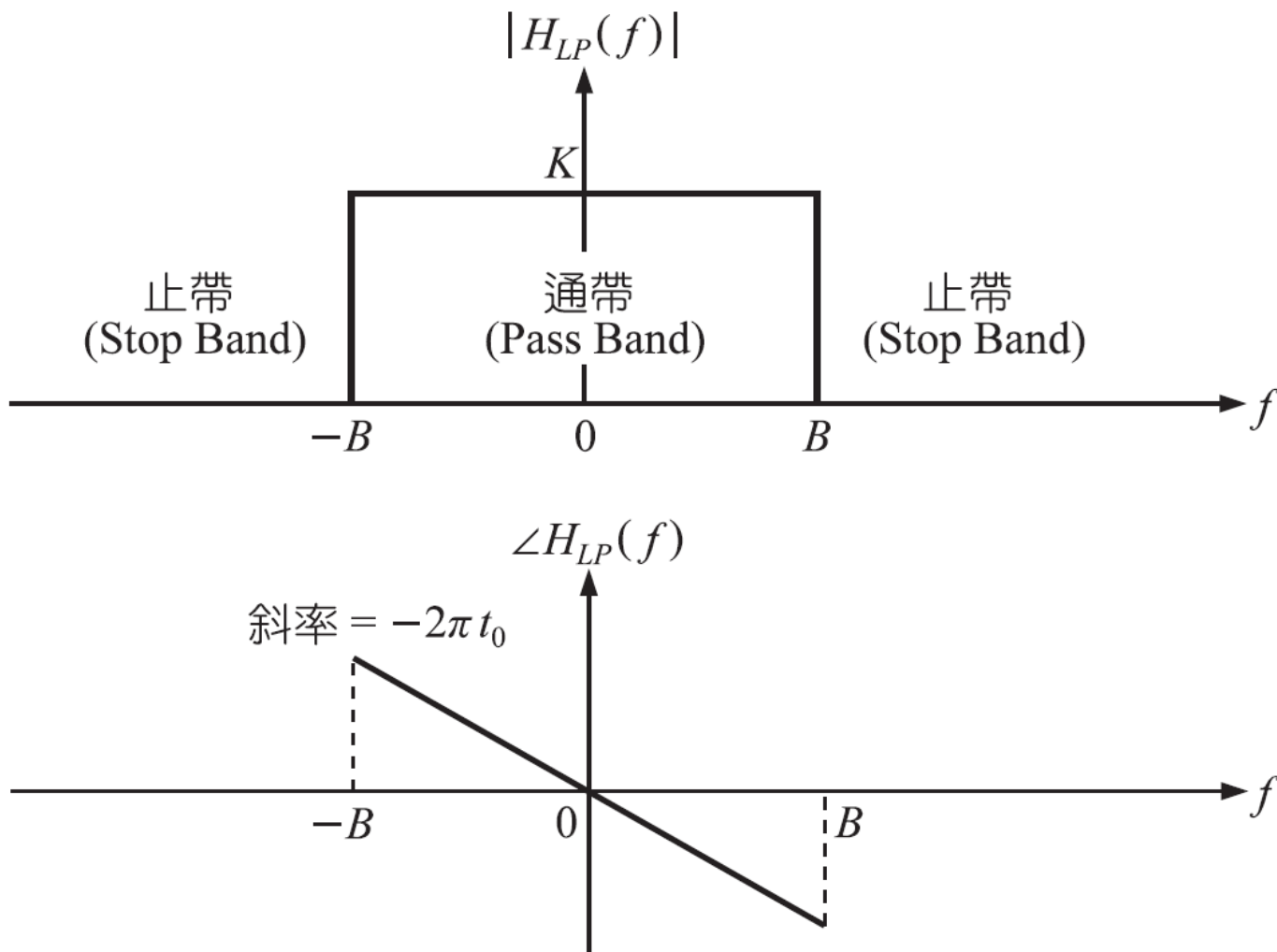


圖 3-99

其脈衝響應函數 $h(t)$ 可以直接計算其逆 Fourier 變換為

$$\begin{aligned}h(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-B}^B Ke^{-j2\pi ft_0} e^{j2\pi ft} df \\&= \frac{K}{2\pi j(t-t_0)} e^{j2\pi f(t-t_0)} \Big|_{-B}^B = 2KB \frac{\sin[2\pi B(t-t_0)]}{2\pi B(t-t_0)} \\&= 2KB \operatorname{sinc}[2B(t-t_0)]\end{aligned}$$

$h(t)$ 之圖形如圖 3-100。

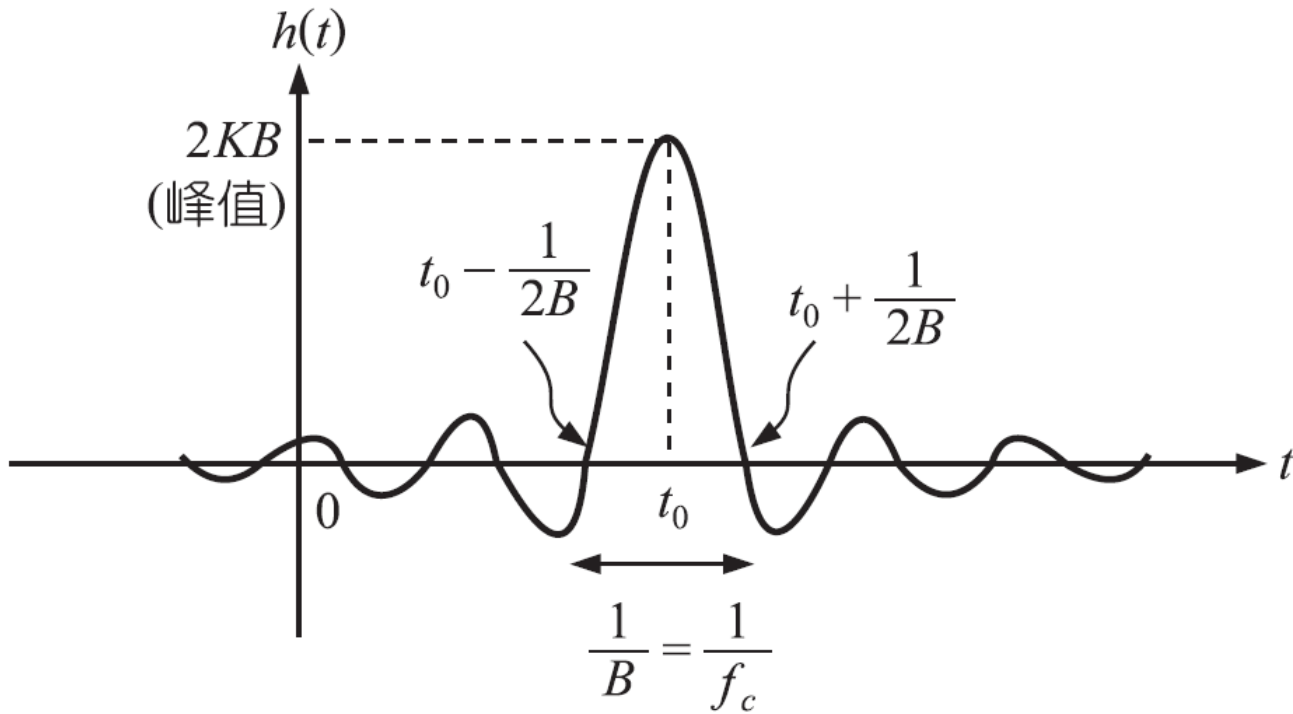


圖 3-100

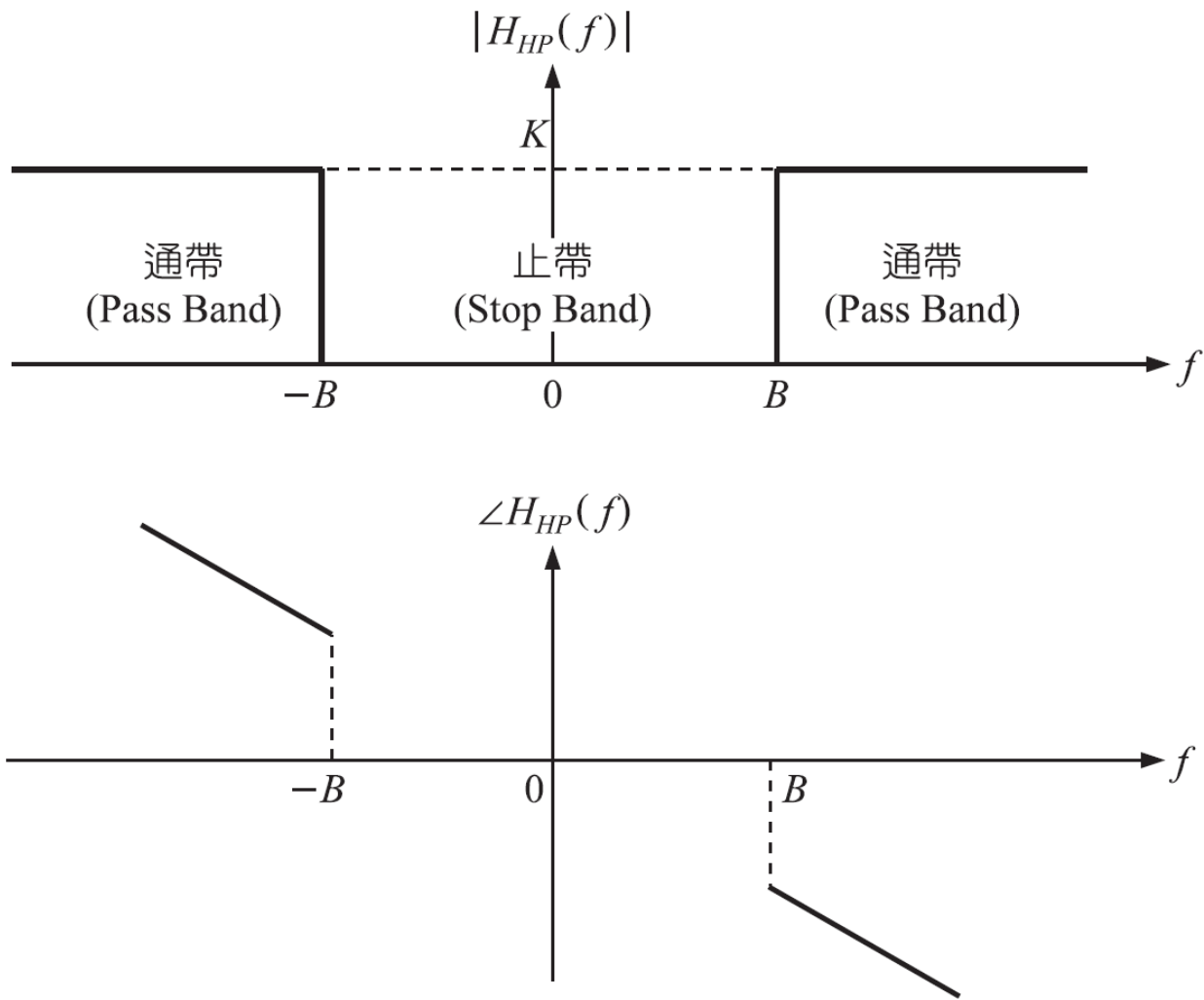


圖 3-101

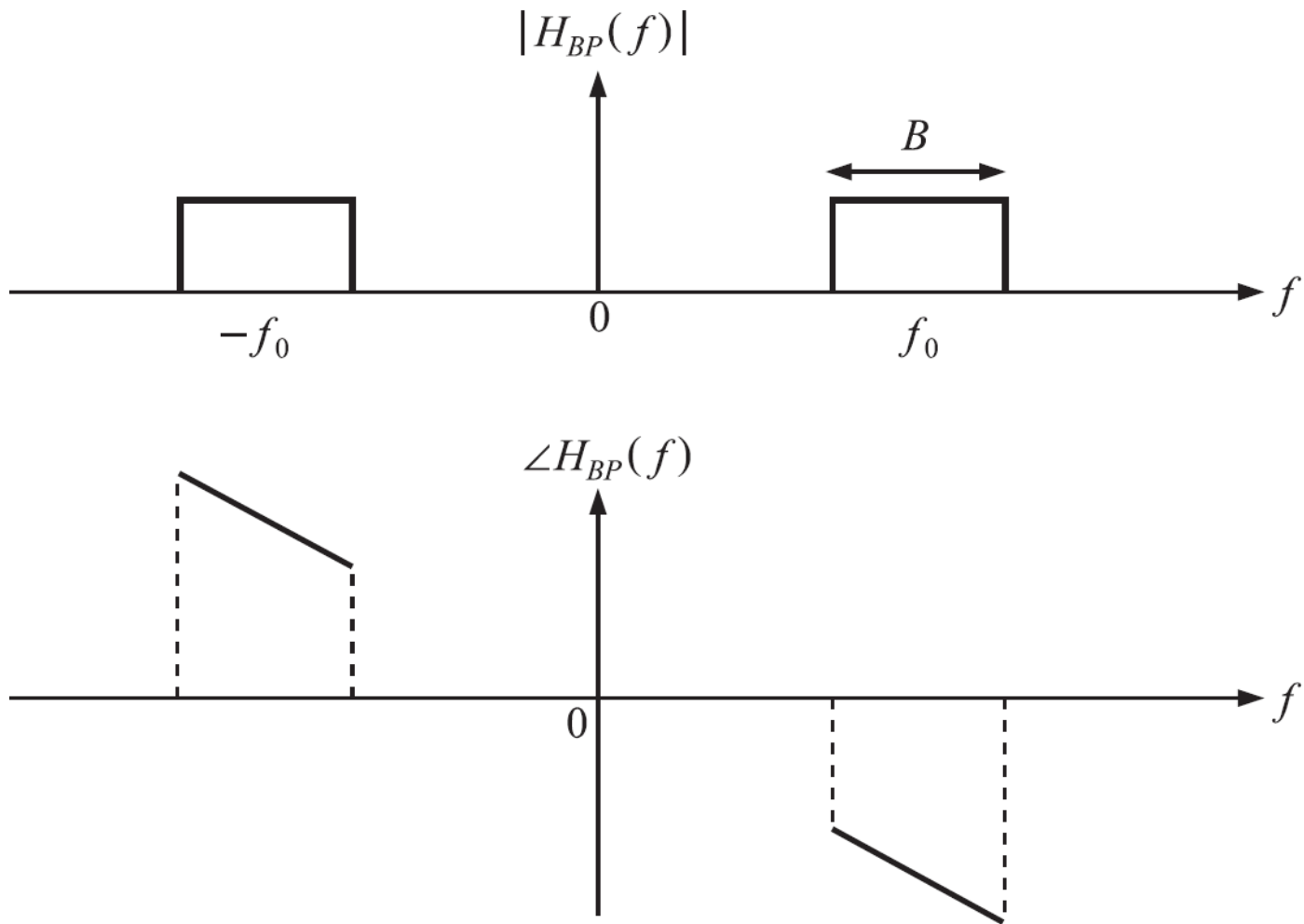


圖 3-102

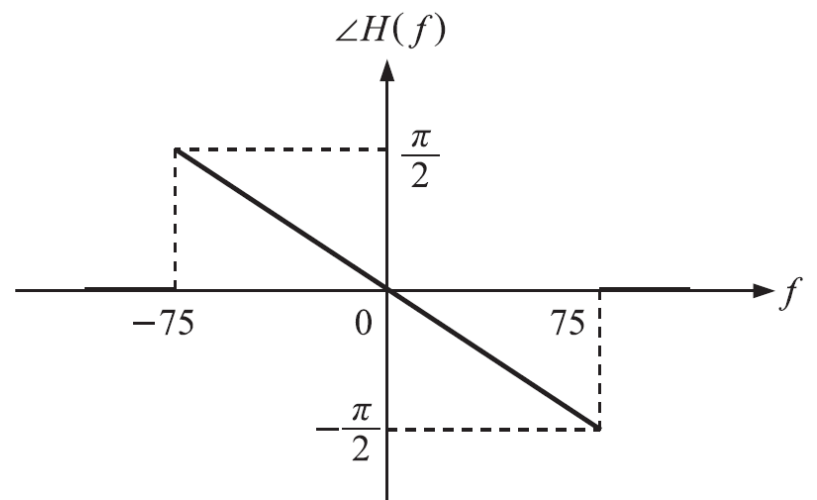
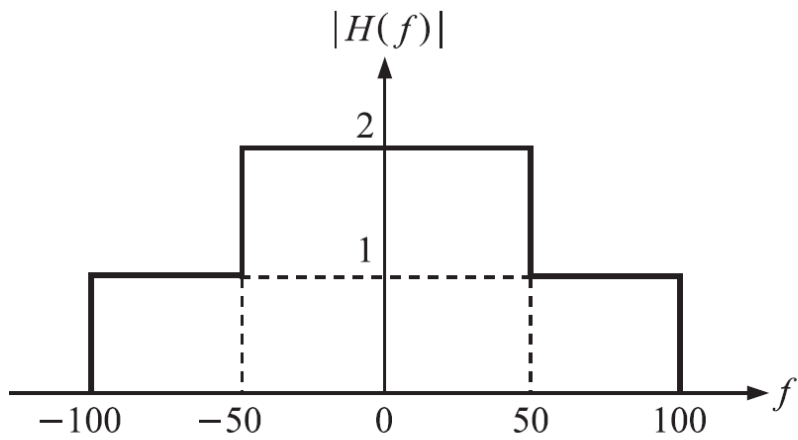


圖 3-103



例題 3-85
EXAMPLE

一個多路徑通訊波道之示意模型如圖 3-104 所示。

- (1) 求此波道之轉移函數 $H_c(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ ，並對 $\beta = 1$ 及 $\beta = 0.5$ 繪出其振幅頻率響應 $|H_c(f)|$ 。
- (2) 為了要等化或是消除失真，常用等化器於波道輸出端，其轉移函數為 $H_{eq}(f) = \frac{1}{H_c(f)}$ ，試找出等化器之 β_1 、 β_2 、 \dots 、 β_N 。

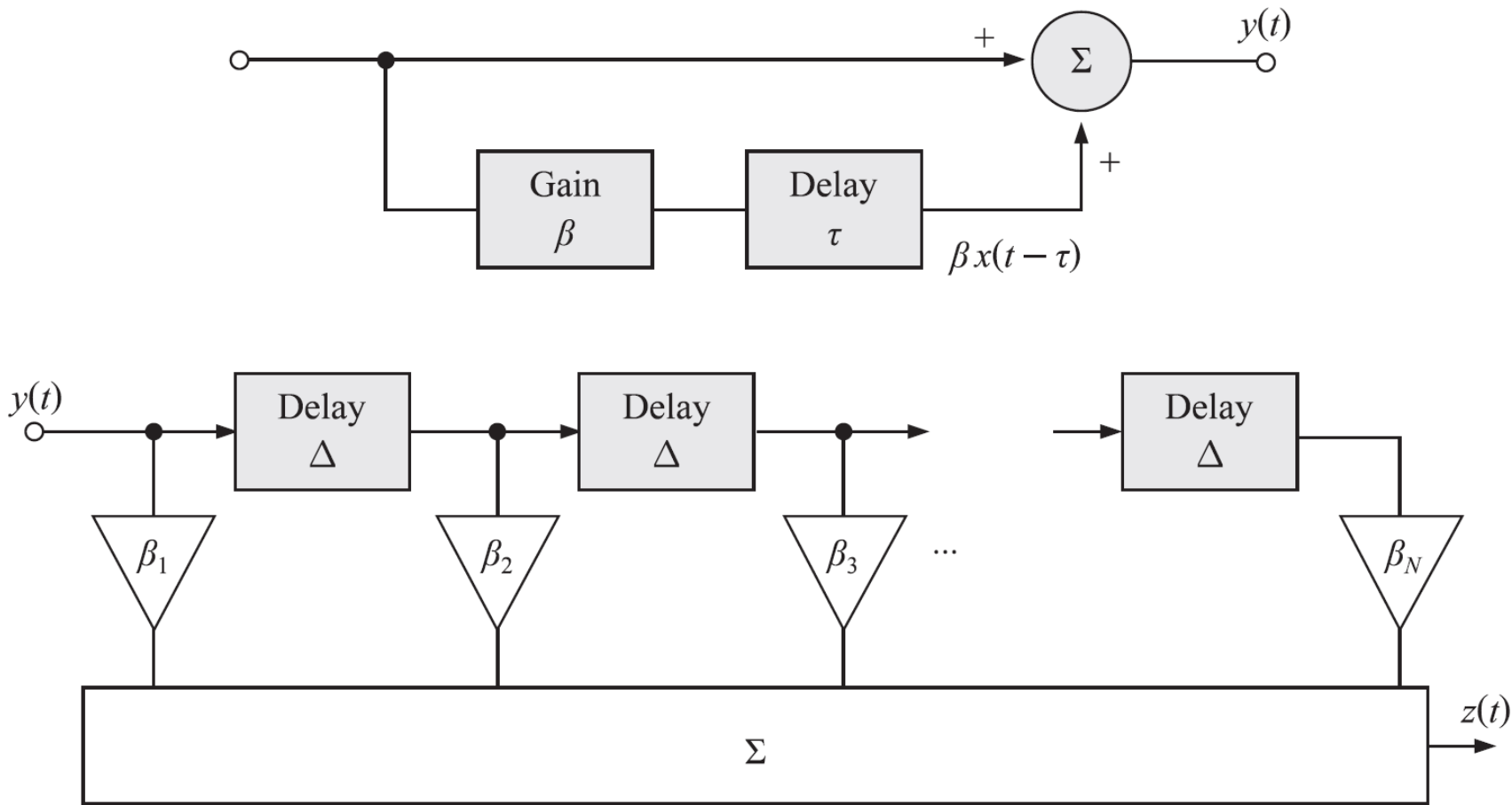


圖 3-104

解 (1) 由 $y(t) = x(t) + \beta x(t - \tau)$ ，所以

$$Y(f) = X(f) + \beta X(f)e^{-j2\pi f\tau} = X(f)[1 + \beta e^{-j2\pi f\tau}]$$

故
$$H_c(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = 1 + \beta e^{-j2\pi f\tau} = 1 + \beta(\cos 2\pi f\tau - j \sin 2\pi f\tau)$$

故
$$|H_c(f)| = \sqrt{(1 + \beta \cos 2\pi f\tau)^2 + (\beta \sin 2\pi f\tau)^2} = \sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \cos 2\pi f\tau}$$

當 $\beta = 1$ ，
$$|H_c(f)| = \sqrt{2 + 2 \cos 2\pi f\tau} = 2|\cos \pi f\tau|$$

當 $\beta = 0.5$ ，
$$|H_c(f)| = \sqrt{1.25 + \cos 2\pi f\tau}$$

圖形如圖 3-105。

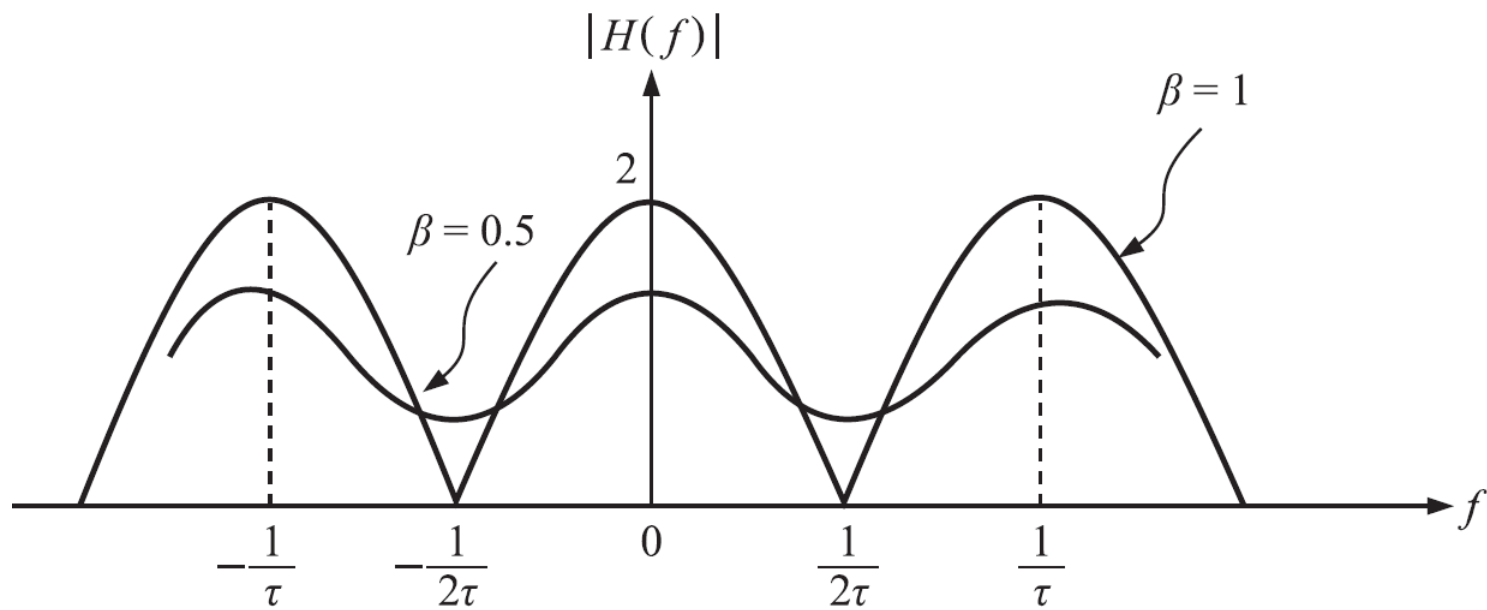


圖 3-105

(2) 由 $z(t) = \beta_1 y(t) + \beta_2 y(t - \Delta) + \dots + \beta_N y(t - (N - 1)\Delta)$ ，所以

$$\begin{aligned} Z(f) &= \beta_1 Y(f) + \beta_2 Y(f) e^{-j2\pi f \Delta} + \dots + \beta_N Y(f) e^{-j2\pi f (N-1)\Delta} \\ &= Y(f) [\beta_1 + \beta_2 e^{-j2\pi f \Delta} + \dots + \beta_N e^{-j2\pi f (N-1)\Delta}] \\ &\equiv Y(f) H_{eq}(f) \end{aligned}$$

故
$$H_{eq}(f) = \beta_1 + \beta_2 e^{-j2\pi f \Delta} + \dots + \beta_N e^{-j2\pi f (N-1)\Delta}$$

又
$$H_{eq}(f) = \frac{1}{H_c(f)} = \frac{1}{1 + \beta e^{-j2\pi f \tau}} \quad (\text{等比級數})$$

$$\approx 1 - \beta e^{-j2\pi f \tau} + \beta^2 e^{-2j2\pi f \tau}$$
$$\Rightarrow H_{eq}(t) = \delta(t) - \beta \delta(t - \tau) + \beta^2 \delta(t - 2\tau) + \dots$$

比較係數即知 $\Delta = \tau, \beta_1 = 1, \beta_2 = -\beta, \beta_3 = \beta^2, \dots, \beta_N = (-\beta)^{N-1}$ 。



圖 3-106

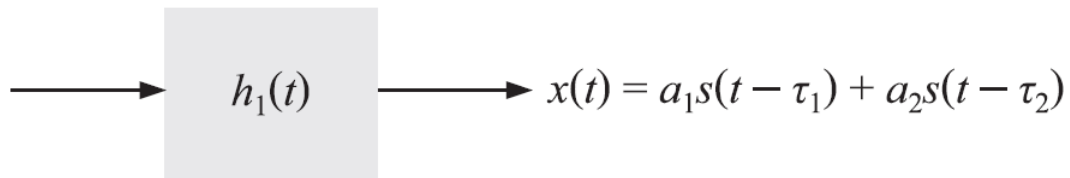


圖 3-107

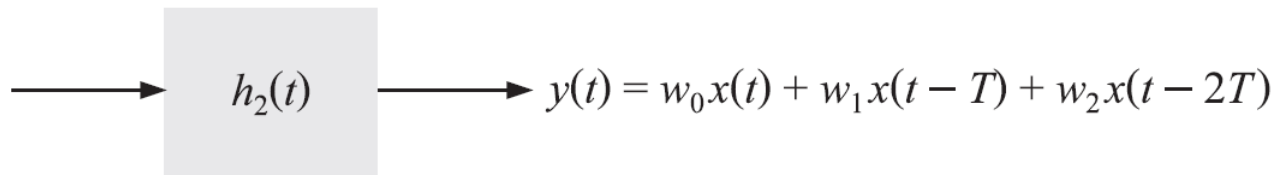


圖 3-108

3-5 Hilbert 變換

希爾伯變換 (Hilbert Transform) 也是通訊原理中經常用到的一種變換，定義如下。

● 定義 3-4

Hilbert 變換

已知 $x(t)$ ，則其 Hilbert 變換及逆 Hilbert 變換分別定義為

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \equiv x(t) * \frac{1}{\pi t}$$
$$x(t) = \mathcal{H}^{-1}\{\hat{x}(t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \equiv \hat{x}(t) * \frac{-1}{\pi t}$$

注意： $x(t)$ 、 $\hat{x}(t)$ 有相同之自變數，觀察知 Hilbert 變換有摺積之外型又屬於「線性」變換。

因爲 $\mathfrak{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f} \rightarrow \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{j\pi t}\right\} = \text{sgn}(-f) = -\text{sgn}(f)$ ，即

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\text{sgn}(f)$$

因此 Hilbert 變換器相當於：脈衝響應爲 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 、轉移函數爲 $H(f) = -j\text{sgn}(f)$ 之「全通」(寬頻)濾波器！如圖 3-109 所示(由頻域看出)。

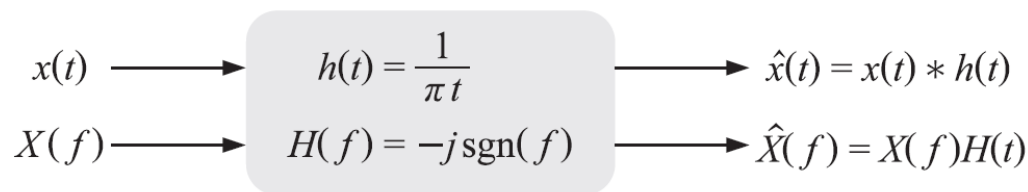


圖 3-109

又 $H(f) = -j\text{sgn}(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)} = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1e^{-j\frac{\pi}{2}}, & f > 0 \\ 1e^{j\frac{\pi}{2}}, & f < 0 \end{cases}$ ，圖 3-110 所示爲 $|H(f)|$ 、 $\angle H(f)$ 之圖形。

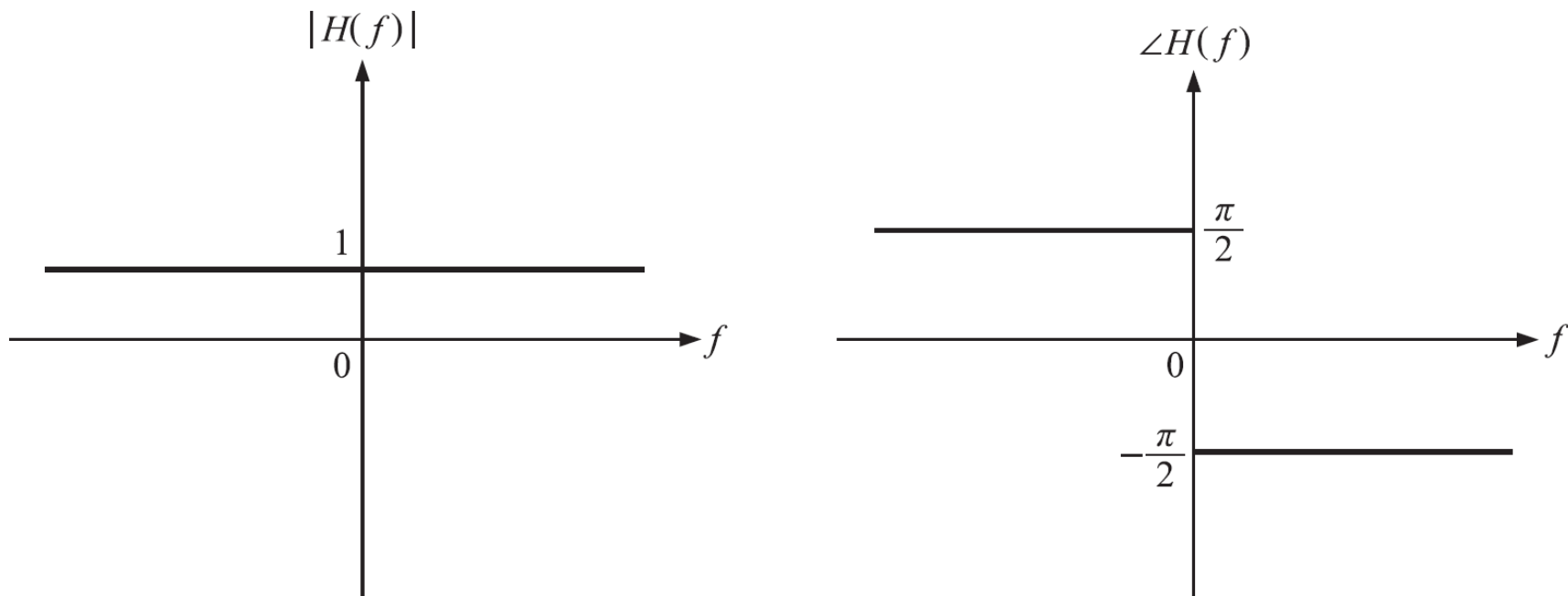


圖 3-110

又 $H^*(f) = \begin{cases} j, & f > 0 \\ -j, & f < 0 \end{cases} = j\text{sgn}(f)$ ，屬於奇函數。且

$$H(f)H^*(f) = 1, \quad -\infty < f < \infty$$

即 Hilbert 變換是以相位為基礎執行訊號分離的行為，即相當一個**相移器** (Phase Shifter)，使得任意訊號通過 Hilbert 變換器後，變成：

1. 振幅不變。
2. 正頻率之相位偏移 $-\frac{\pi}{2}$ ，負頻率之相位偏移 $+\frac{\pi}{2}$ (因為相乘恰好是角度相加)。

知道 Hilbert 變換之起源後，如下之七個性質已可輕鬆得知。

性質一

$|X(f)| = |\hat{X}(f)|$ ，且 $x(t)$ 、 $\hat{x}(t)$ 之能量相同：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt$$

證明 因 $\hat{X}(f) = X(f) \cdot [-j\text{sgn}(f)]$ ，故 $|X(f)| = |\hat{X}(f)|$ 。又利用 Parseval 定理得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

性質二

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

證明 $H(f) = H_1(f)H_2(f) = [-j\text{sgn}(f)]^2 = 1$ (得證)，意義如圖 3-111 所示。

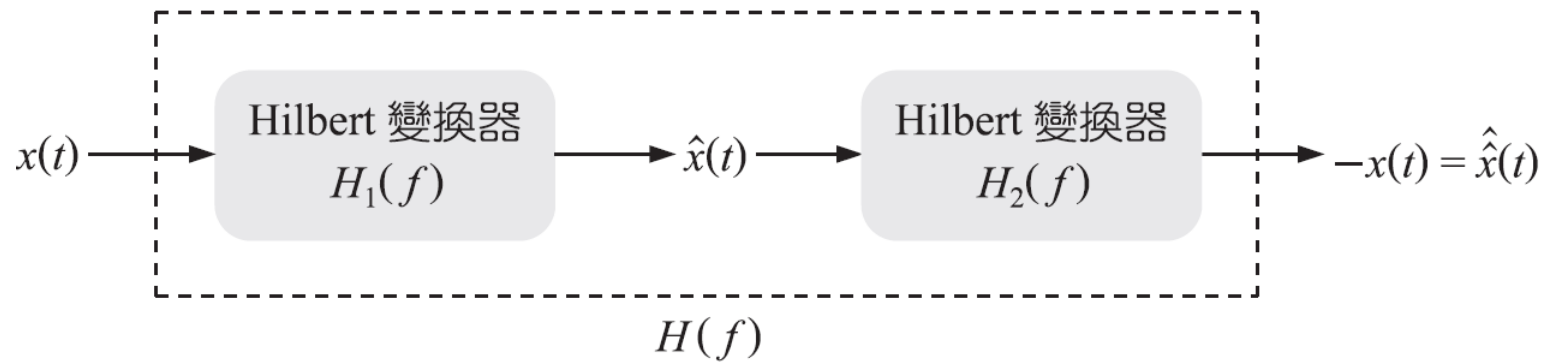


圖 3-111

性質三

若 $x(t)$ 為能量訊號，則 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt = 0$ ，即 $x(t)$ 、 $\hat{x}(t)$ 為正交。

證明

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt &= F\{x(t)\hat{x}(t)\}\Big|_{f=0} = X(f) * \hat{X}(f)\Big|_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\hat{X}(f-\lambda) d\lambda\Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)X(f-\lambda)(-j\text{sgn}(f-\lambda)) d\lambda\Big|_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)X(-\lambda)(-j\text{sgn}(-\lambda)) d\lambda = j \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)X^*(\lambda)\text{sgn}(\lambda) d\lambda \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 \text{sgn}(\lambda) d\lambda = 0\end{aligned}$$

因為 $\text{sgn}(\lambda)$ 為奇函數，而 $|X(\lambda)|^2$ 為偶函數！

另法：
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)\hat{x}(t) dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)x(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt = 0$$



性質四

已知 $m(t)$ 為低通訊號， $c(t)$ 為高通訊號，且 $m(t)$ 、 $c(t)$ 之頻譜不重疊，若 $x(t) = m(t)c(t)$ 則 $\widehat{x(t)} = \widehat{m(t)c(t)} = m(t)\widehat{c(t)}$ 。

證明 令 $M(f) = \mathfrak{F}\{m(t)\}$ ，且 $M(f) = 0$ for $|f| > W$ (低通)
 $C(f) = \mathfrak{F}\{c(t)\}$ ，且 $C(f) = 0$ for $|f| < W$ (高通)

$$\begin{aligned} m(t)c(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} M(f)e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{j2\pi\lambda t} d\lambda \\ \widehat{m(t)c(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)M(f)e^{j2\pi(f+\lambda)t} dfd\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)M(f)(-j\text{sgn}(f+\lambda))e^{j2\pi(f+\lambda)t} dfd\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M(f)e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)(-j\text{sgn}\lambda)e^{j2\pi\lambda t} d\lambda = m(t)\widehat{c(t)} \end{aligned}$$

另證 $\widehat{\mathfrak{F}\{m(t)c(t)\}} = -j\text{sgn}(f)[M(f) * C(f)] = -j\text{sgn}(f) \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau)C(f-\tau) d\tau$ ，故

$$\begin{aligned}
\widehat{m(t)c(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-j \operatorname{sgn}(f) \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) C(f - \tau) d\tau \right] e^{j2\pi ft} df \\
\lambda \equiv f - \tau &= \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn}(f) C(f - \tau)) e^{j2\pi ft} df \right] d\tau \\
&\searrow \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn}(\lambda + \tau) C(\lambda)) e^{j2\pi(\lambda + \tau)t} d\lambda \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) e^{j2\pi\tau t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn}(\lambda + \tau) C(\lambda)) e^{j2\pi\lambda t} d\lambda \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) e^{j2\pi\tau t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn}(\lambda) C(\lambda)) e^{j2\pi\lambda t} d\lambda \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) e^{j2\pi\tau t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(\lambda) e^{j2\pi\lambda t} d\lambda \right] d\tau = m(t) \hat{c}(t)
\end{aligned}$$

說明：
$$\int_{-\infty}^{\infty} (-j\text{sgn}(\lambda + \tau)C(\lambda))e^{j2\pi\lambda t} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [-j\text{sgn}(\lambda)C(\lambda)e^{j2\pi\lambda t}] d\lambda$$

配合 $C(\lambda)$ 之意義！ $C(\lambda)$ 為高通。

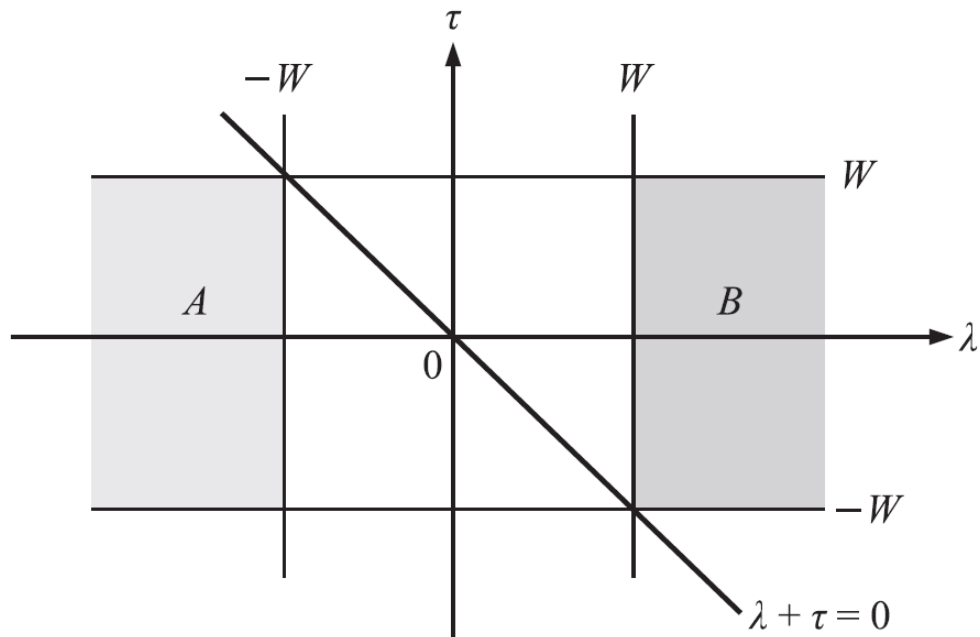


圖 3-112

如圖 3-112，在區域 A 、 B ， $\text{sgn}(\lambda + \tau) = \text{sgn}(\lambda)$ 。



性質五

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{H}} \sin(2\pi f_0 t), \quad \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{H}} -\cos(2\pi f_0 t)$$

證明 令 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ，則

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= -j\text{sgn}(f) \cdot \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{-j}{2}\delta(f - f_0) + \frac{j}{2}\delta(f + f_0)\end{aligned}$$

故
$$\hat{x}(t) = \frac{-j}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{j}{2}e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{-j}{2}[e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] = \sin(2\pi f_0 t)$$

同理，令 $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ ，則

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) \cdot \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{-1}{2} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2} \delta(f + f_0)\end{aligned}$$

故
$$\hat{x}(t) = \frac{-1}{2} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{-1}{2} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] = -\cos(2\pi f_0 t)$$

記法：正好與三角函數微分之結果相反！（但與積分相同）



結合性質四、性質五，可知若 $x(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t)$ ， $m(t)$ 為低通訊號，則

$$\hat{x}(t) = m(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

性質六

$$e^{j2\pi f_0 t} \begin{matrix} \xrightarrow{\mathcal{H}} \\ \xleftarrow{\mathcal{H}^{-1}} \end{matrix} -j \operatorname{sgn}(f_0) e^{j2\pi f_0 t} = \begin{cases} -je^{j2\pi f_0 t}, & f_0 > 0 \\ je^{j2\pi f_0 t}, & f_0 < 0 \end{cases} \quad (\text{上式常用})$$

證明 (1) 當 $f_0 > 0$:

$$\begin{aligned} e^{j2\pi f_0 t} &= \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) \\ &\xrightarrow{\mathcal{H}} \sin(2\pi f_0 t) + [-j \cos(2\pi f_0 t)] \\ &= -j[\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= -je^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

(2) 當 $f_0 < 0$:

$$\begin{aligned} e^{j2\pi f_0 t} &= \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi(-f_0)t) - j \sin(2\pi(-f_0)t) \\ &\xrightarrow{\mathcal{H}} \sin(2\pi(-f_0)t) - [-j \cos(2\pi(-f_0)t)] \\ &= -\sin(2\pi f_0 t) + j \cos(2\pi f_0 t) = j[\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)] \\ &= je^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$



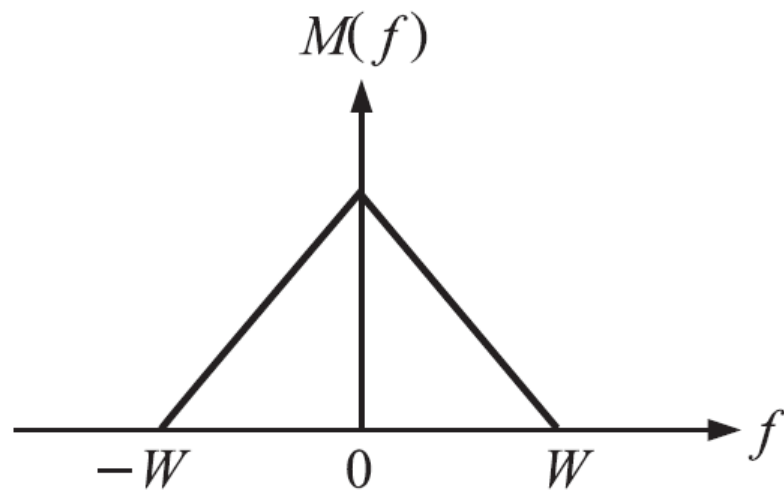


圖 3-113

例題 3-88
EXAMPLE

Find the Hilbert transform of the signal $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

解 不要直接計算！絕大部分 $x(t)$ 的 Hilbert 變換之計算都遵守如圖 3-114 之計算流程。



圖 3-114

因 $\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\} = \pi e^{-2\pi|f|} = X(f)$ ，所以 $\hat{X}(f) = -j\text{sgn}(f) \cdot X(f) = -j\text{sgn}(f)\pi e^{-2\pi|f|}$ ，故

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{X}(f)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{-j\text{sgn}(f)\pi e^{-2\pi|f|}\} \\ &= j\pi \int_{-\infty}^0 e^{2\pi f} e^{j2\pi f t} df - j\pi \int_0^{\infty} e^{-2\pi f} e^{j2\pi f t} df\end{aligned}$$

$$= j\pi \int_0^{\infty} e^{-2\pi(1+jt)f} df - j\pi \int_0^{\infty} e^{-2\pi(1-jt)f} df \quad (\text{直接計算})$$

$$= j\pi \cdot \frac{1}{2\pi(1+jt)} - j\pi \cdot \frac{1}{2\pi(1-jt)} = \frac{t}{1+t^2} \quad (\text{重要結果})$$

利用性質一可知 $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 dt$ 。(請自行以微積分驗證)

例題 3-89
EXAMPLE

Find the Hilbert transform of the following signals:

(1) $x(t) = \sin c(2t)$

(2) $x(t) = \delta(t)$

(3) $x(t) = \sin c(2t) \sin(20\pi t)$

(4) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$

解 不要直接計算！

(1) 已知 $X(f) = \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$ ，所以

$$\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \cdot \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{j}{2} \left[\Pi\left(\frac{f + \frac{1}{2}}{1}\right) - \Pi\left(\frac{f - \frac{1}{2}}{1}\right) \right] \quad (\text{可繪圖判知})$$

$$\text{故 } \hat{x}(t) = \frac{j}{2} \sin c(t) e^{-j2\pi \frac{1}{2} t} - \frac{j}{2} \sin c(t) e^{j2\pi \frac{1}{2} t} = \sin c(t) \sin(\pi t)。$$

(2) 已知 $\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1$ ，所以 $\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$ ，故 $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t}$ 。

另法： $\delta(t)$ 是「唯一」可以由定義直接計算 Hilbert 變換的函數！

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \frac{1}{t - \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{\pi t}$$

(3) 由 $\mathfrak{F}\{\sin c(2t)\} = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{2}\right)$ ，所以

$$\mathfrak{F}\{\sin c(2t) \sin(20\pi t)\} = \frac{1}{4j} \left[\Pi\left(\frac{f-10}{2}\right) - \Pi\left(\frac{f+10}{2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= -j\text{sgn}(f) \cdot \frac{1}{4j} \left[\Pi\left(\frac{f-10}{2}\right) - \Pi\left(\frac{f+10}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[\Pi\left(\frac{f-10}{2}\right) + \Pi\left(\frac{f+10}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{故 } \hat{x}(t) = -\frac{1}{4} [2 \sin c(2t) e^{j2\pi \cdot (10)t} + 2 \sin c(2t) e^{-j2\pi \cdot (10)t}] = -\sin c(2t) \cos(20\pi t) \circ$$

$$\text{另法：} \mathcal{H}\{\sin c(2t) \sin(20\pi t)\} = \sin c(2t) \mathcal{H}\{\sin(20\pi t)\} = -\sin c(2t) \cos(20\pi t) \circ$$

$$(4) x(t) = \frac{\sin t}{t} = \sin c\left(\frac{t}{\pi}\right) \Rightarrow X(f) = \pi \text{rect}(\pi f)$$

$$\Rightarrow \hat{X}(f) = -j\text{sgn}(f) \pi \text{rect}(\pi f)$$

$$\text{故 } \hat{x}(t) = \frac{1 - \cos t}{t} \circ$$

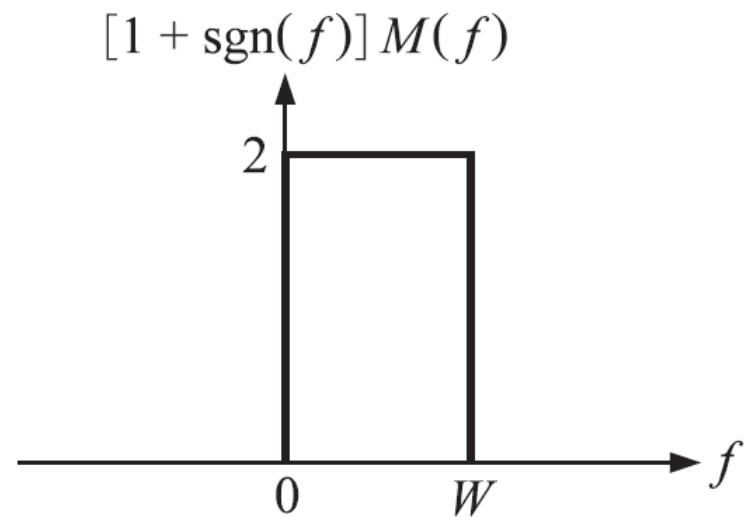
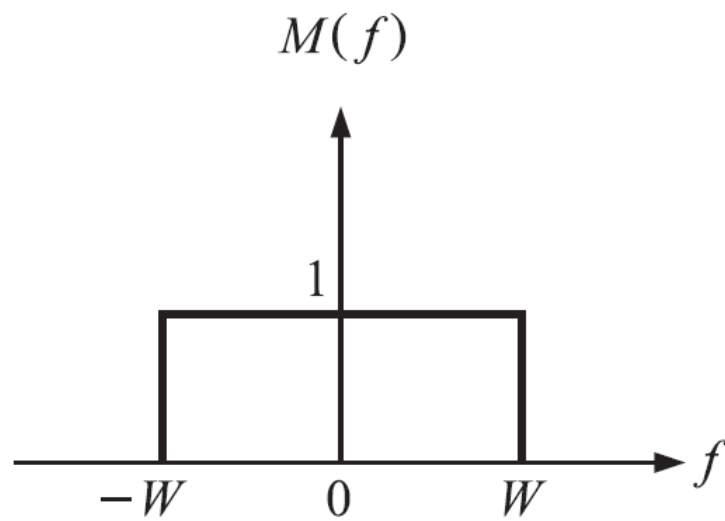


圖 3-115

3-6 帶通訊號及其系統

● 定義 3-5

帶通訊號 (Bandpass Signal) 或稱窄頻訊號 (Narrowband Signal)

已知 $x(t)$ 為帶通訊號，若 $X(f)$ 為其頻譜，則

$$X(f) = \begin{cases} \neq 0, & f_c - W < f < f_c + W, \quad -f_c - W < f < -f_c + W \\ = 0, & \text{其餘} \end{cases}$$

如圖 3-116 之說明。

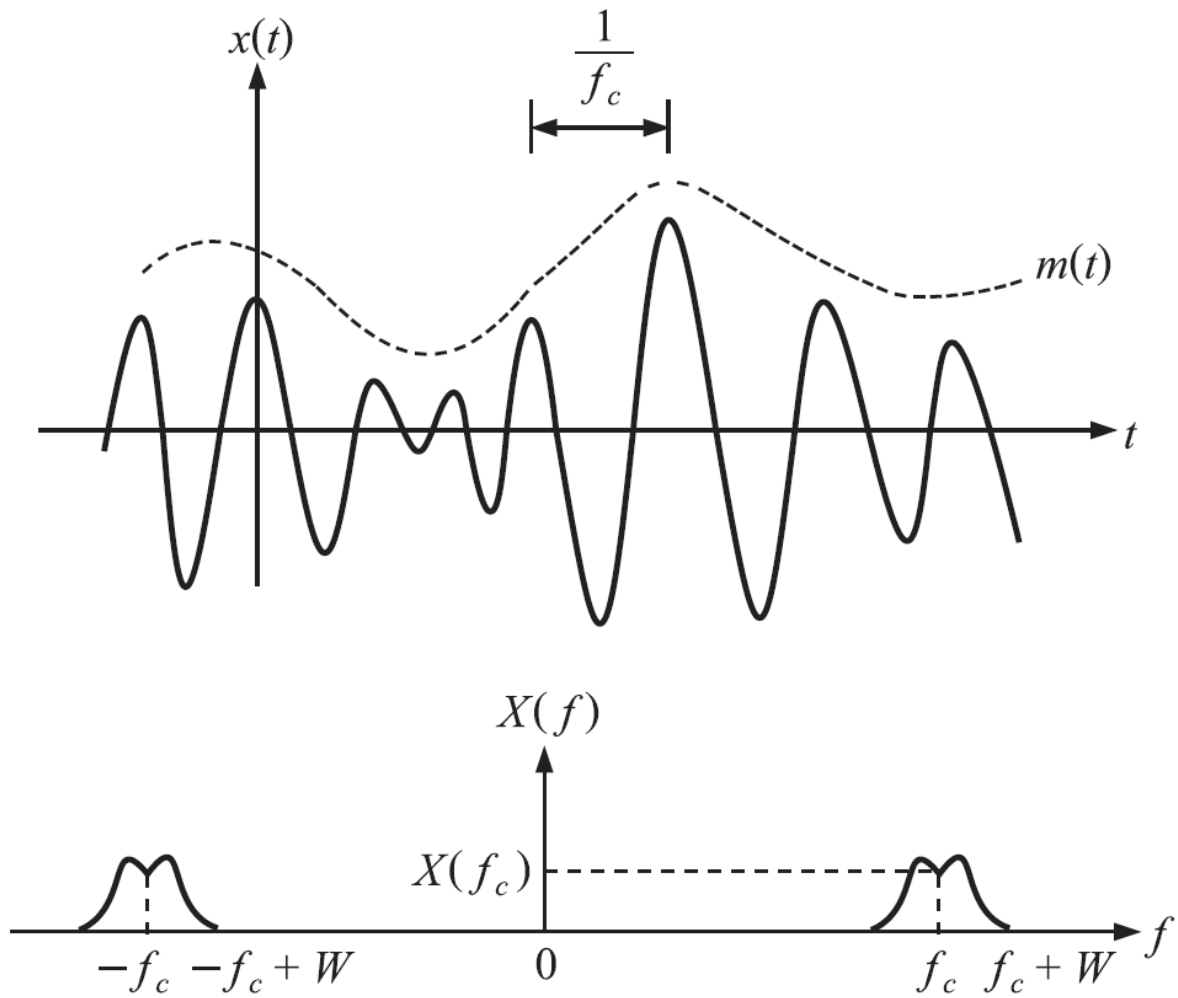


圖 3-116

$$x(t) = m(t) \cos [2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (3-43)$$

其中 $m(t)$ ：波封 (Envelope)，相當於「振幅」，一般皆有 $m(t) \geq 0$ ，在通訊原理中， $m(t)$ 相當為**基頻訊號** (Baseband Signal) 或稱**訊息訊號** (Message Signal) 或**調變訊號** (Modulating Signal)； $\cos [2\pi f_c t + \phi(t)]$ ：弦式波，在通訊原理中，相當為**載波** (Carrier)； $\phi(t)$ ：相位 (Phase)。

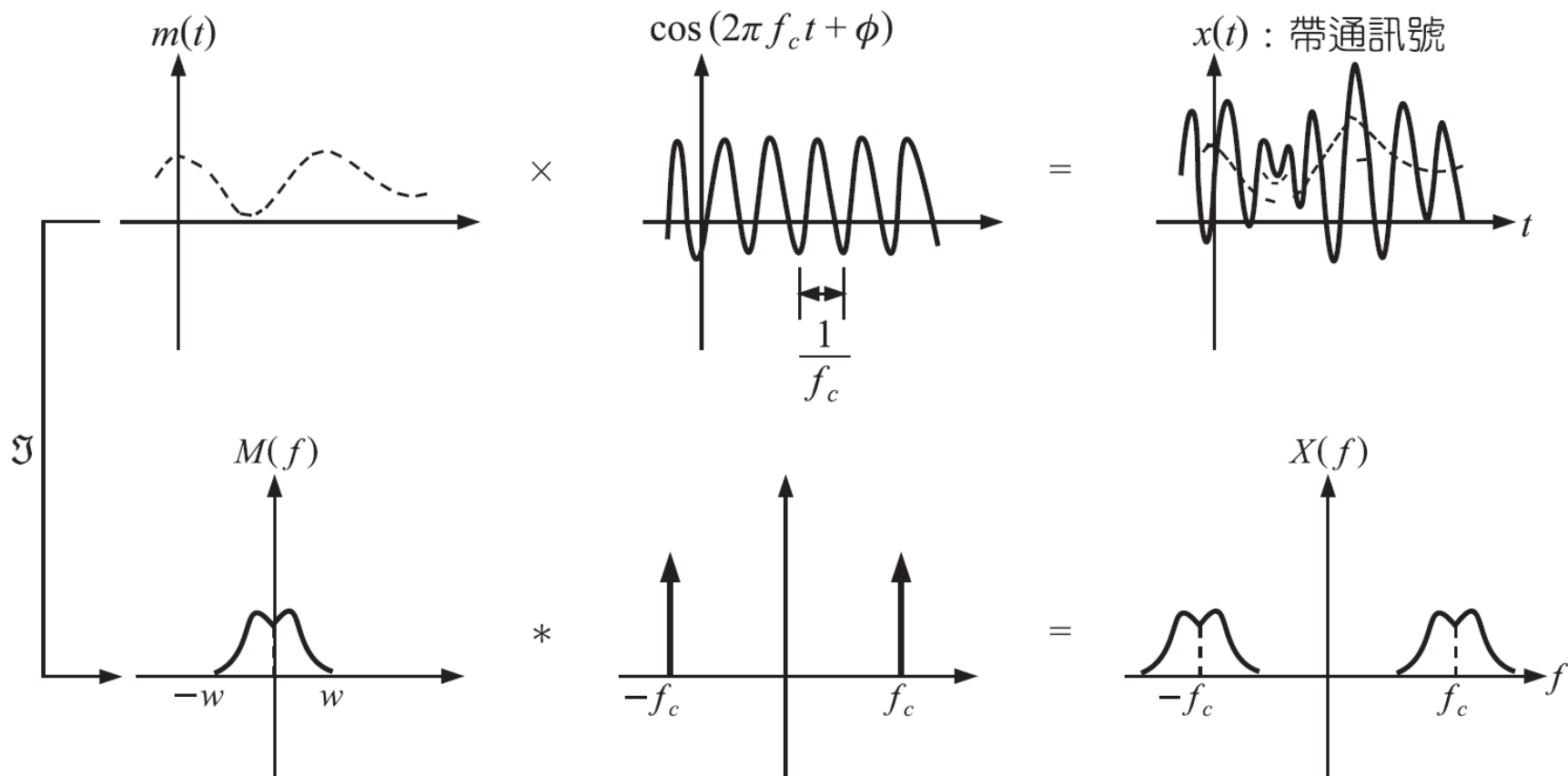
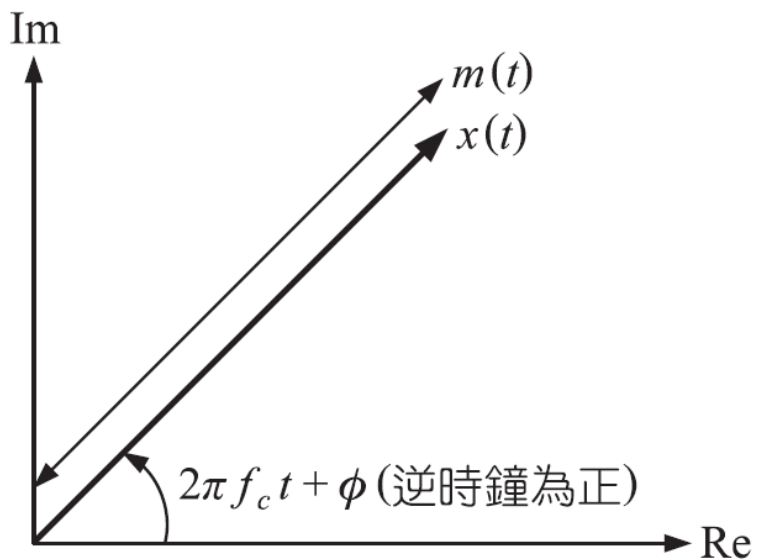
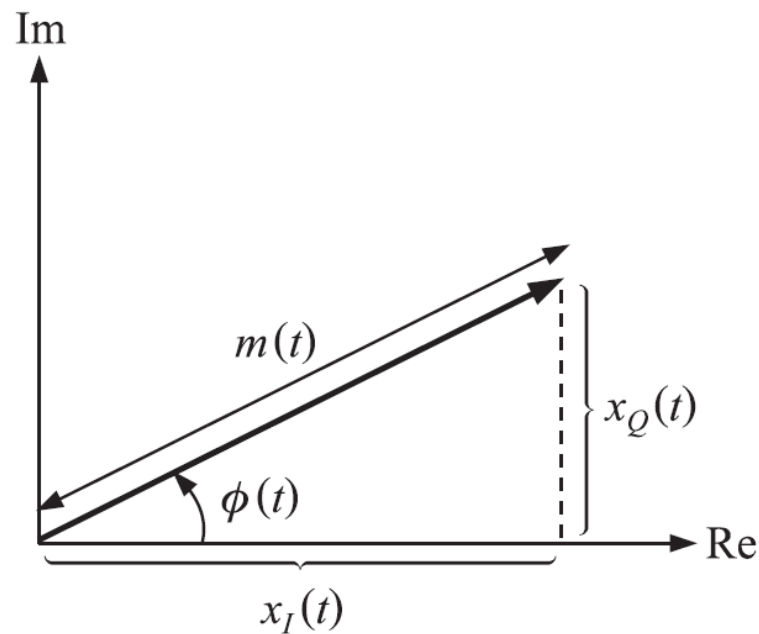


圖 3-117



(a) 旋轉相量圖



(b) 去掉旋轉 (載波) $2\pi f_c t$ 後之相量圖

圖 3-118

觀察此兩圖後，可得 $x(t)$ 之另一種表示法。亦即如果令

$$\begin{cases} x_I(t) = m(t) \cos \phi(t) \\ x_Q(t) = m(t) \sin \phi(t) \end{cases} \quad (\text{去掉旋轉，即去掉載波}) \quad (3-44)$$

則

$$\begin{aligned} x(t) &= m(t) \cos [2\pi f_c t + \phi(t)] \\ &= m(t) [\cos (2\pi f_c t) \cos \phi(t) - \sin (2\pi f_c t) \sin \phi(t)] \\ &= x_I(t) \cos (2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin (2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (3-45)$$

$$= x_I(t) \cos (2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos \left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3-46)$$

(3-45)式稱爲一個帶通訊號的「**正交載波**」(Quadrature-Carrier)形式描述，其命名理由可以在(3-46)式看出：兩項相差 $\frac{\pi}{2}$ (即垂直，亦可互相抵消)！因此也稱

$$\begin{cases} x_I(t) : \text{同相 (In-Phase) 分量} \\ x_Q(t) : \text{正交 (Quadrature) 分量} \end{cases}$$

不含載波，僅含**低通** (Lowpass) 訊號。目前止仍在實數系中探討，欲擴充到複數系，藉由(3-44)式創造一個**複數波封** (Complex Envelope) 函數 $\tilde{x}(t)$ 如下：

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= m(t)e^{j\phi(t)} \quad (\text{去掉旋轉，即去掉載波}) \\ &= m(t) \cos [\phi(t)] + jm(t) \sin [\phi(t)] \end{aligned} \tag{3-47}$$

則 $m(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} = |\tilde{x}(t)|$ ，可知 $\tilde{x}(t)$ 稱為**複數波封**之理由 [屬於複數又可計算波封，又稱為**低通等價訊號** (Lowpass Equivalence Signal)]，因為波封是資訊訊號，有關波封的計算才是核心，且 $\tilde{x}(t)$ 已是一個**低通** (Lowpass) 訊號，因為去掉了 $e^{2\pi f_c t}$ ！(3-47)式再與 (3-44)式比較後可知

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \quad (3-48)$$

由 (3-47)式與 (3-43)式比較得

$$x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (3-49)$$

(3-49)式稱為一個帶通訊號的「複數波封」(Complex Envelope) 形式描述，(3-43)式、(3-45)式和(3-49)式這三式是描述一個帶通訊號在時域的基本式。但此時 $x(t)$ 、 $\tilde{x}(t)$ 兩者並無直接之數學關係，需再藉由有關頻域之分析才可。

由 (3-49) 式之形式知，可令

$$x_+(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t} \quad (3-50)$$

其中 $x_+(t)$ 稱爲**可解析訊號** (Analytic Signal)，計算頻譜時相當有用，又稱爲**前波封** (Pre-Envelope)，屬於複數 [但 $x(t)$ 爲實數]，藉由以下的說明可知：可解析訊號 (前波封) 可視爲具有旋轉特性相量之一般化表示法。再由

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t} = m(t)e^{j\phi(t)}e^{j2\pi f_c t} = m(t)e^{j[2\pi f_c t + \phi(t)]} \\ &= m(t) \cos [2\pi f_c t + \phi(t)] + jm(t) \sin [2\pi f_c t + \phi(t)] \end{aligned}$$

因爲

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\{m(t) \cos [2\pi f_c t + \phi(t)]\} = m(t) \sin [2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (3-51)$$

故

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (3-52)$$

總結

有關這六個函數 $x_+(t)$ 、 $\tilde{x}(t)$ 、 $x(t)$ 、 $\hat{x}(t)$ 、 $x_I(t)$ 、 $x_Q(t)$ 之特性與關係整理如下：

1. 特性：
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{帶通訊號} : x_+(t) \left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{array} \right. \\ \text{低通訊號} : \tilde{x}(t) \left\{ \begin{array}{l} x_I(t) \\ x_Q(t) \end{array} \right. \end{array} \right.$$
2. 數系：
$$\left\{ \begin{array}{l} x(t), \hat{x}(t), x_I(t), x_Q(t) \in R \\ x_+(t), \tilde{x}(t) \in C \end{array} \right.$$
3. 關係：如圖 3-119 所示。

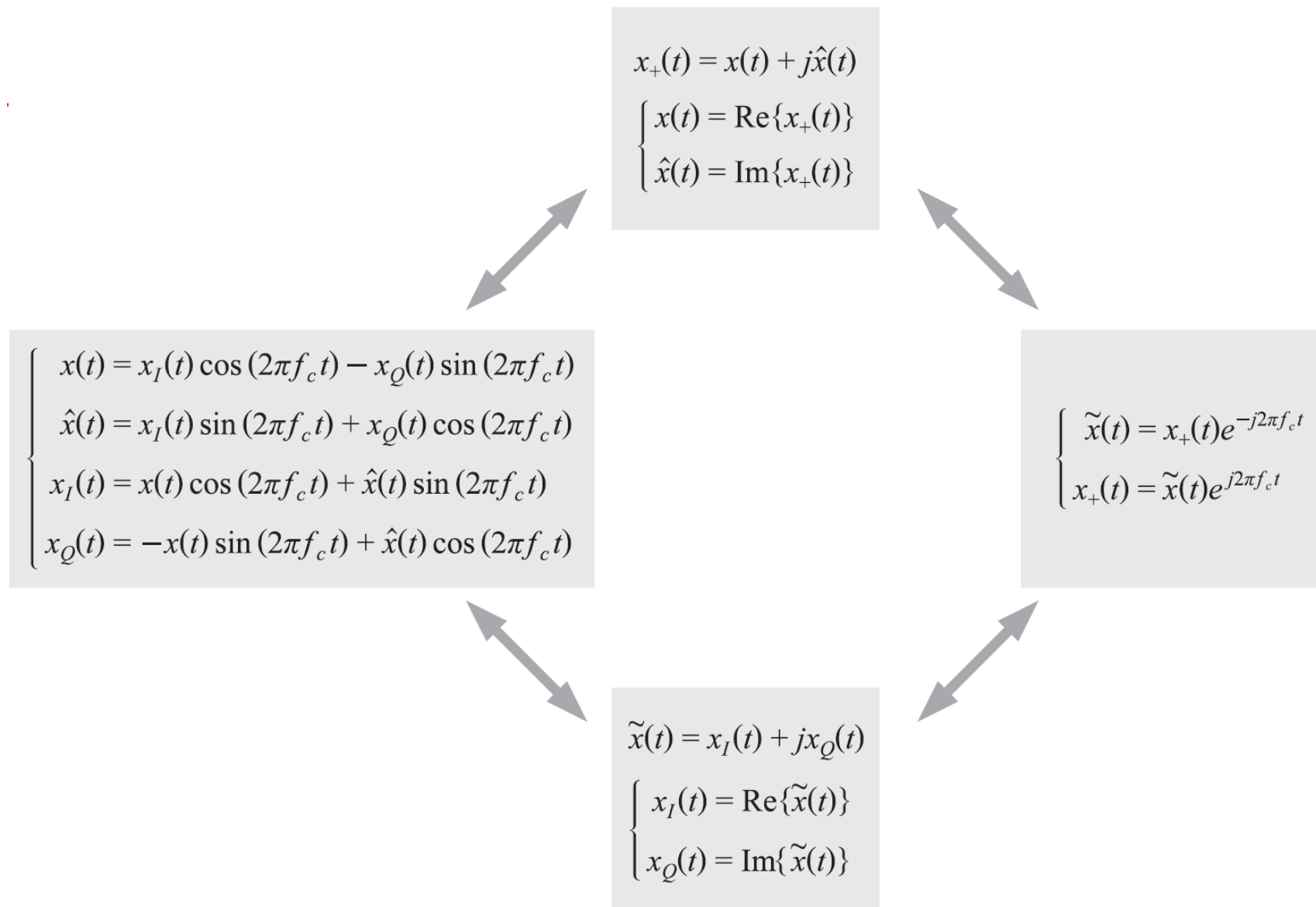


圖 3-119

此處 $\hat{x}(t) = x_I(t) \sin(2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos(2\pi f_c t)$ 是由 $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ 所推出。對 (3-52) 式取其頻譜得

$$\begin{aligned} X_+(f) &= \mathfrak{F}\{x_+(t)\} = X(f) + j[-j\text{sgn}(f)]X(f) \\ &= X(f) + \text{sgn}(f)X(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ X(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-53)$$

此結果即表示前波封之頻譜不含負頻率部分，因此數學上 (3-53) 式亦表示了

$$x_+(t) = 2 \int_0^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3-54)$$

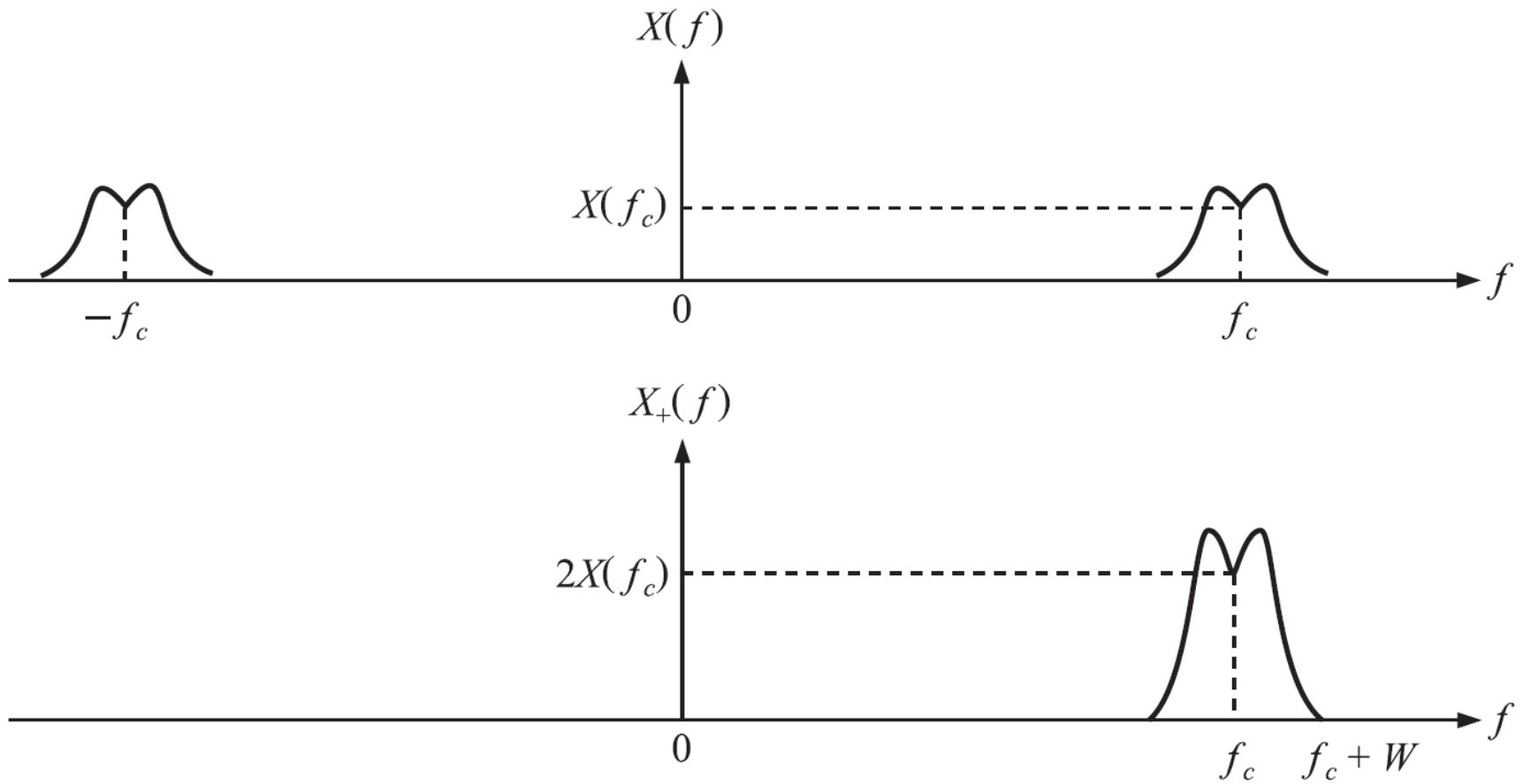
從 $\tilde{x}(t)$ 與 $x_+(t)$ 之頻譜來看其關係最清楚了，如圖 3-120 所示。

此外，再針對負頻率部分，定義負頻率的前波封 (Pre-Envelope) 為

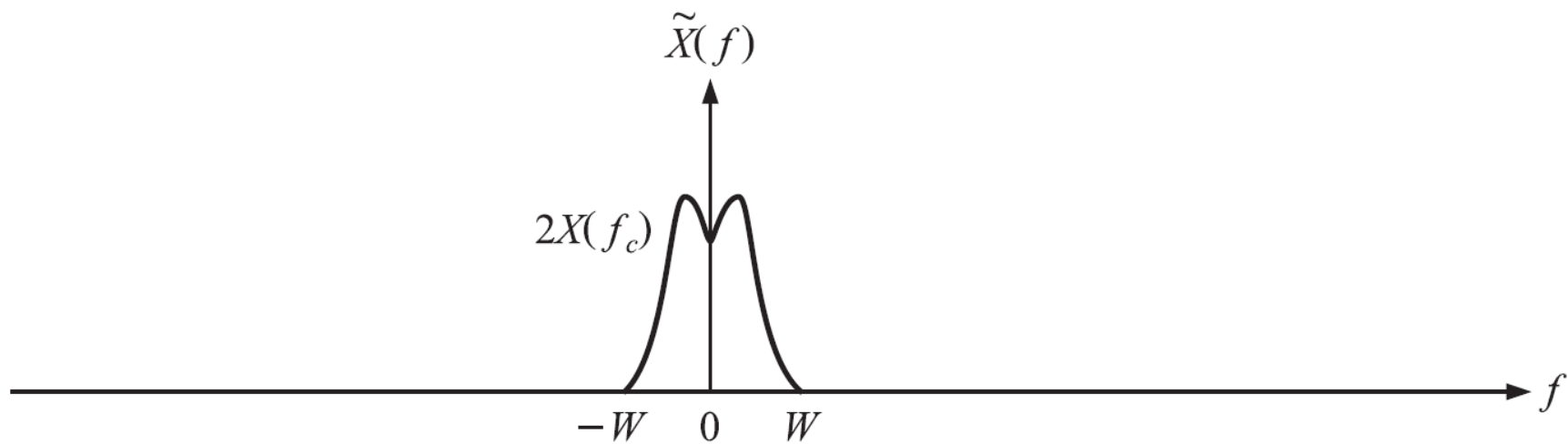
$$x_-(t) \equiv x(t) - j\hat{x}(t) \quad (3-55)$$

對 (3-55) 式取其頻譜得

$$\begin{aligned} X_-(f) &= \mathfrak{F}\{x_-(t)\} = X(f) - j[-j\text{sgn}(f)]X(f) \\ &= X(f) - \text{sgn}(f)X(f) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ X(0), & f = 0 \\ 2X(f), & f < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-56)$$



(a) 前波封 $x_+(t)$ 之頻譜



(b) 複數波封 $\tilde{x}(t)$ 之頻譜

圖 3-120

此結果亦表示了

$$x_-(t) = 2 \int_{-\infty}^0 X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3-57)$$

$x_-(t)$ 之頻譜如圖 3-121 所示。

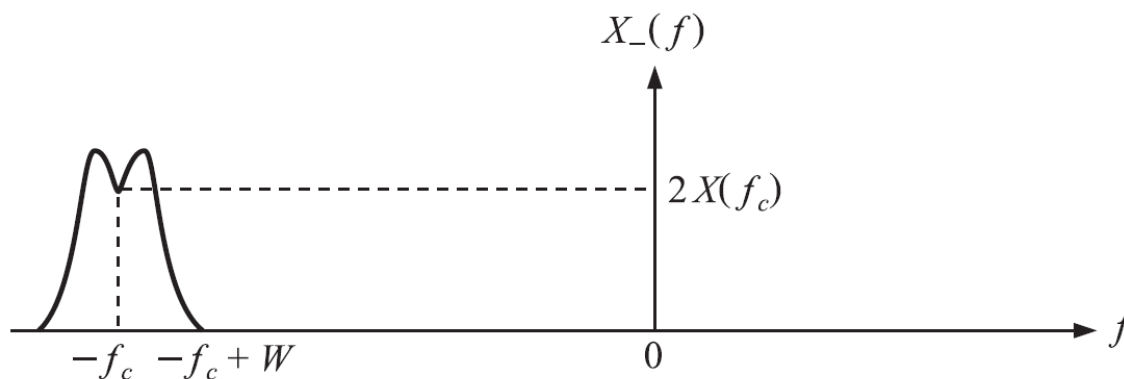


圖 3-121

以上之關係式在表示帶通 (Bandpass) 訊號與低通訊號時皆是重要的，亦即數學上加入「前波封」的目的是爲了在頻域上「解析」帶通與低通這兩種常見訊號，故前波封又稱爲可解析訊號，以後的相關內容皆會用到。

已知窄頻訊號 $x(t)$ 的頻譜限於 $f_c - W \leq f \leq f_c + W$ ， $x_I(t)$ 、 $x_Q(t)$ 分別為其同相與正交成分，試推導：

$$X_I(f) = \begin{cases} X(f - f_c) + X(f + f_c), & -W \leq f \leq W \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_Q(f) = \begin{cases} j[X(f - f_c) - X(f + f_c)], & -W \leq f \leq W \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $X(f)$ 、 $X_I(f)$ 、 $X_Q(f)$ 分別為 $x(t)$ 、 $x_I(t)$ 、 $x_Q(t)$ 之 Fourier 變換。

解 由

$$\begin{cases} x_I(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t) & \dots\dots \textcircled{1} \\ x_Q(t) = -x(t) \sin(2\pi f_c t) + \hat{x}(t) \cos(2\pi f_c t) & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

對①式取 Fourier 變換得

$$\begin{aligned} X_I(f) &= \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)] - \frac{1}{2} [X(f - f_c) \text{sgn}(f - f_c) - X(f + f_c) \text{sgn}(f + f_c)] \\ &= \frac{1}{2} X(f - f_c) [1 - \text{sgn}(f - f_c)] + \frac{1}{2} X(f + f_c) [1 + \text{sgn}(f + f_c)] \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

利用如圖 3-122 之圖示說明。

(1) 在 $-W \leq f \leq W$ 中，有 $\text{sgn}(f - f_c) = -1$, $\text{sgn}(f + f_c) = 1$ ，將這些結果代入③式中得

$$X_I(f) = X(f - f_c) + X(f + f_c)$$

(2) 在 $2f_c - W \leq f \leq 2f_c + W$ 中，有 $\text{sgn}(f - f_c) = 1$, $X(f + f_c) = 0$ ，將這些結果代入③式中得 $X_I(f) = 0$ 。

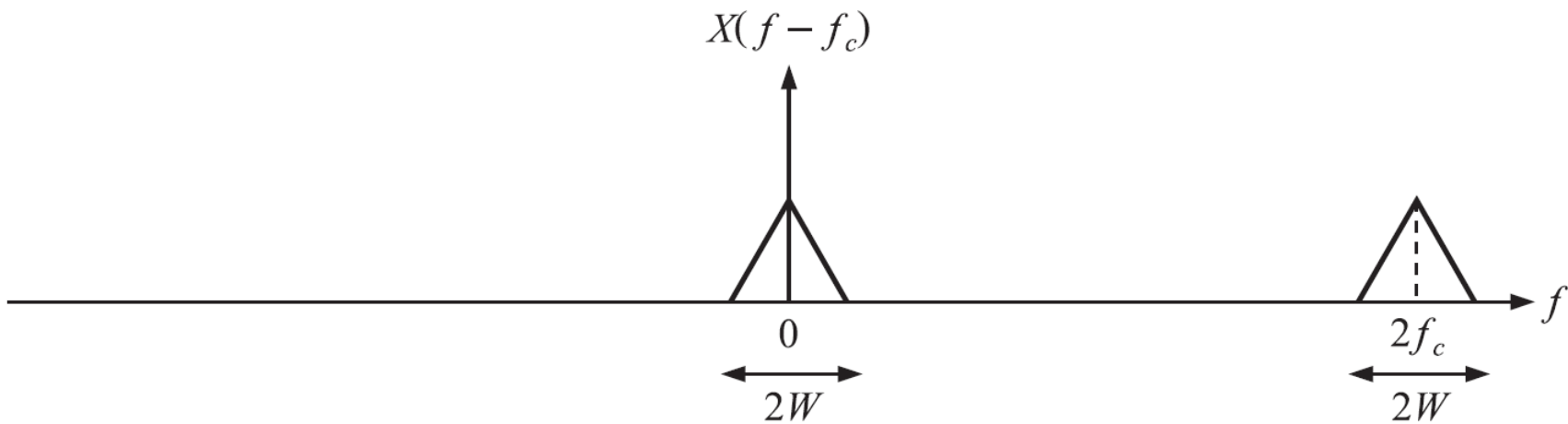
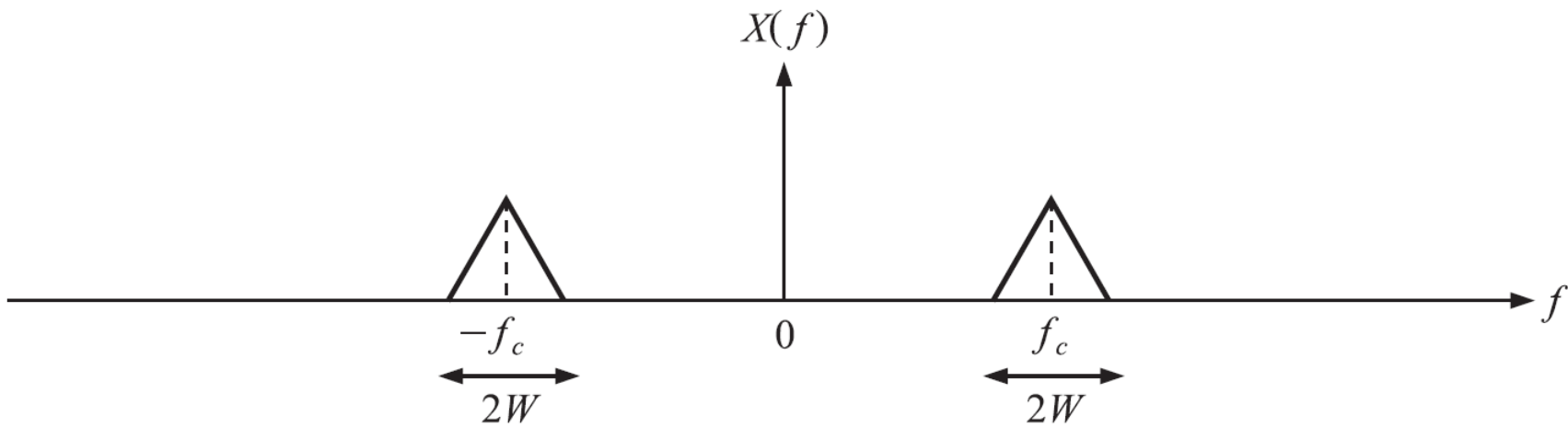
(3) 在 $-2f_c - W \leq f \leq -2f_c + W$ ，有 $X(f - f_c) = 0$, $\text{sgn}(f + f_c) = -1$ ，將這些結果代入③式得 $X_I(f) = 0$ 。

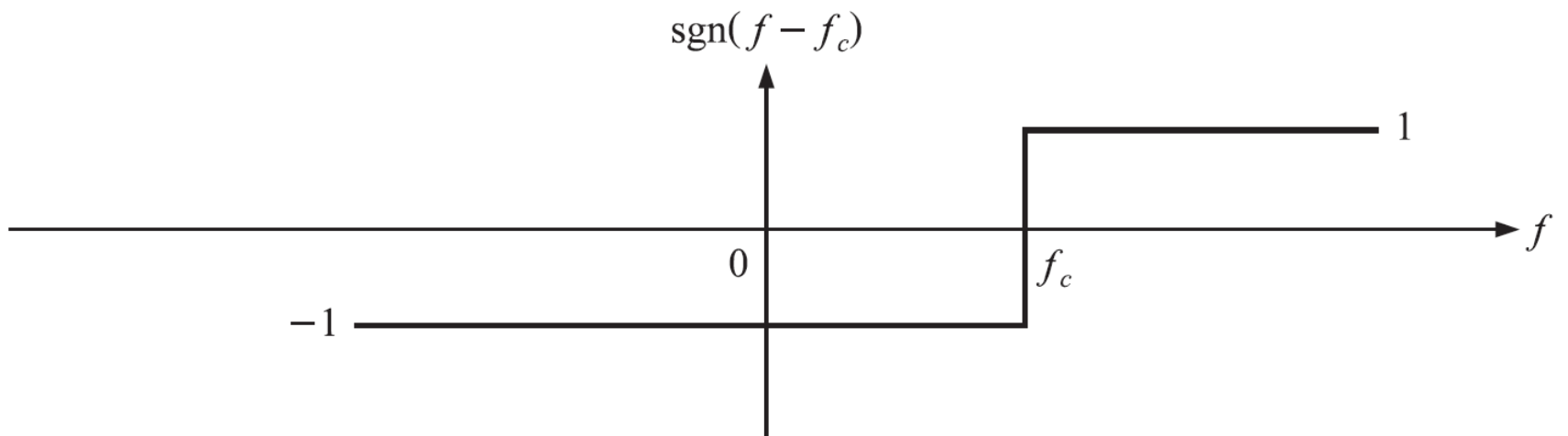
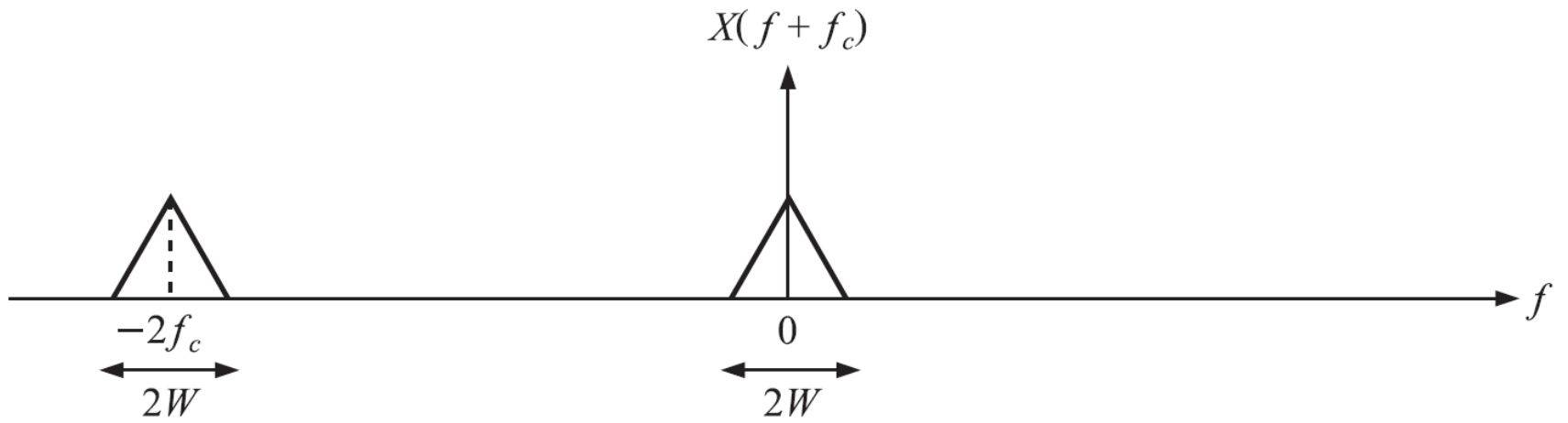
(4) 在其他範圍，有 $X(f - f_c) = X(f + f_c) = 0$ ，將這些結果代入③式中得 $X_I(f) = 0$ 。

故得證①式。同理，對②式取 Fourier 變換得

$$\begin{aligned} X_Q(f) &= -\frac{1}{2j} [X(f - f_c) - X(f + f_c)] \\ &\quad -\frac{j}{2} [X(f - f_c)\text{sgn}(f - f_c) + X(f + f_c)\text{sgn}(f + f_c)] \\ &= \frac{j}{2} X(f - f_c) [1 - \text{sgn}(f - f_c)] - \frac{j}{2} X(f + f_c) [1 + \text{sgn}(f + f_c)] \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

同樣之分析可得證②式。





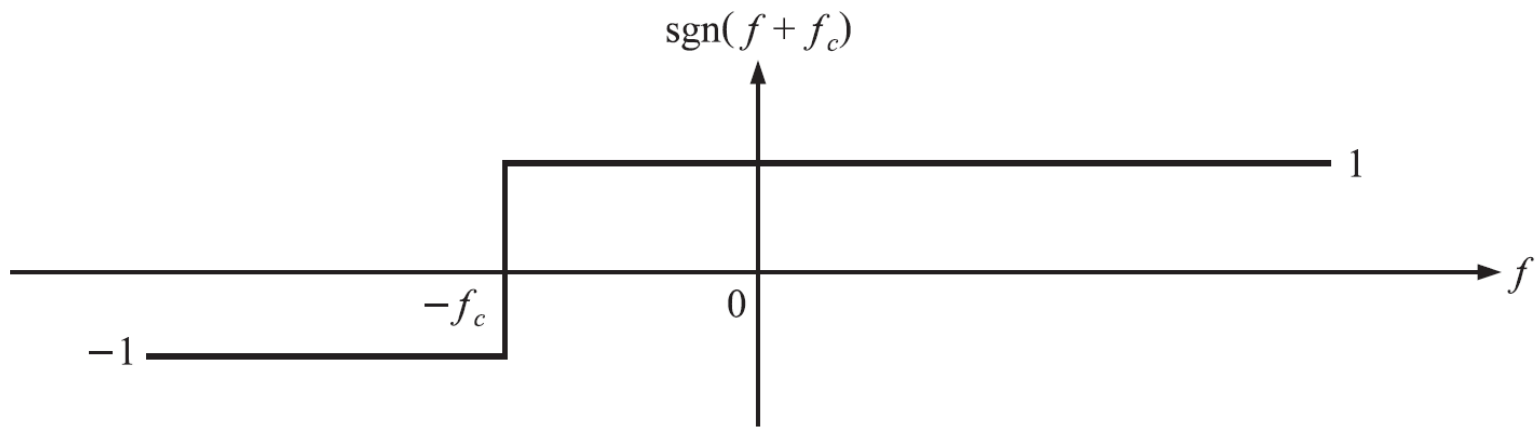


圖 3-142

綜合前面所述，利用圖 3-123 之方塊圖可了解訊號 $x(t)$ 與訊號 $x_I(t)$ 、 $x_Q(t)$ 之關係。

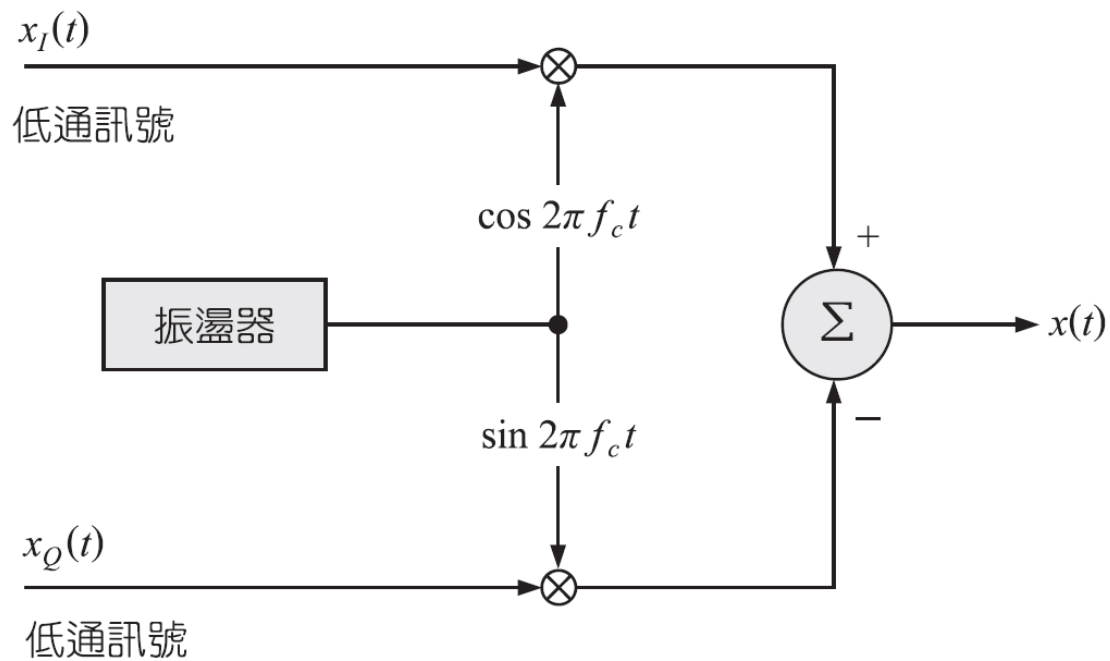


圖 3-123

從同相分量 $x_I(t)$ 與垂直分量 $x_Q(t)$ 重組帶通訊號 $x(t)$ ，因

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

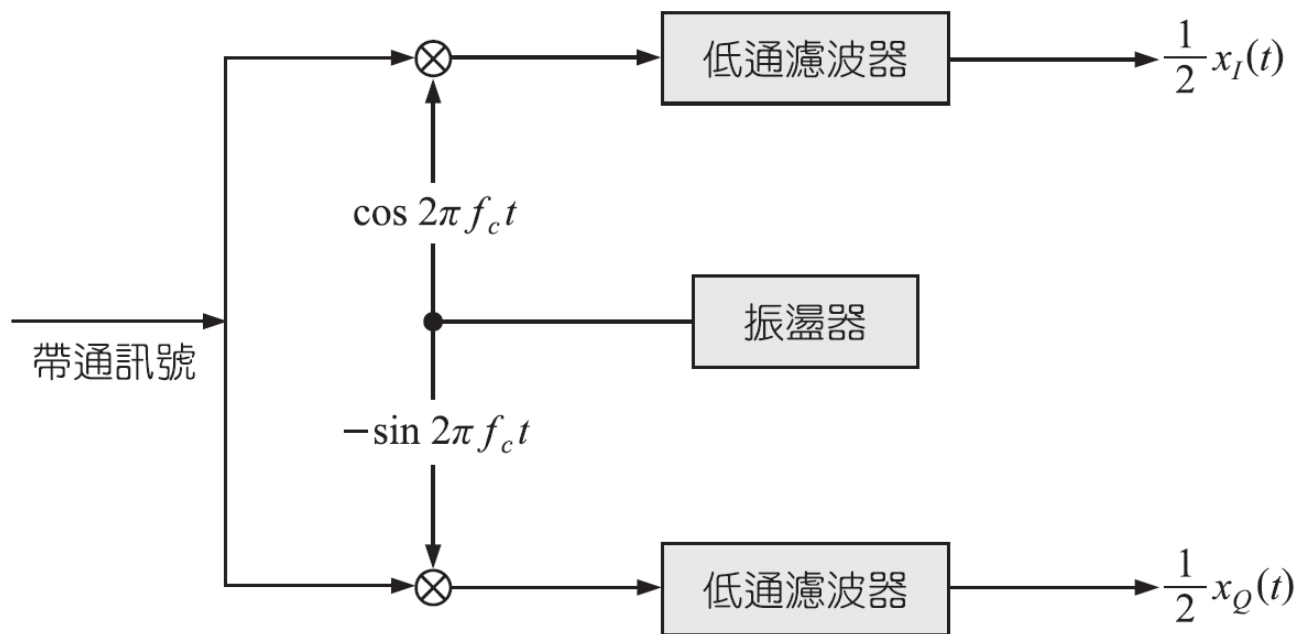


圖 3-124

從帶通訊號 $x(t)$ 分離出同相分量 $x_I(t)$ 與垂直分量 $x_Q(t)$ ，因

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

故

$$\begin{cases} x(t) \cos(2\pi f_c t) = x_I(t) \cos^2(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) \\ -x(t) \sin(2\pi f_c t) = -x_I(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos^2(2\pi f_c t) \end{cases}$$

經 LPF 後得 $\begin{cases} \frac{1}{2}x_I(t) \\ \frac{1}{2}x_Q(t) \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x_I(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)\} = \text{LPF}\{2x(t) \cos(2\pi f_c t)\} \\ x_Q(t) = \text{Im}\{\tilde{x}(t)\} = \text{LPF}\{-2x(t) \sin(2\pi f_c t)\} \end{cases}$ 。

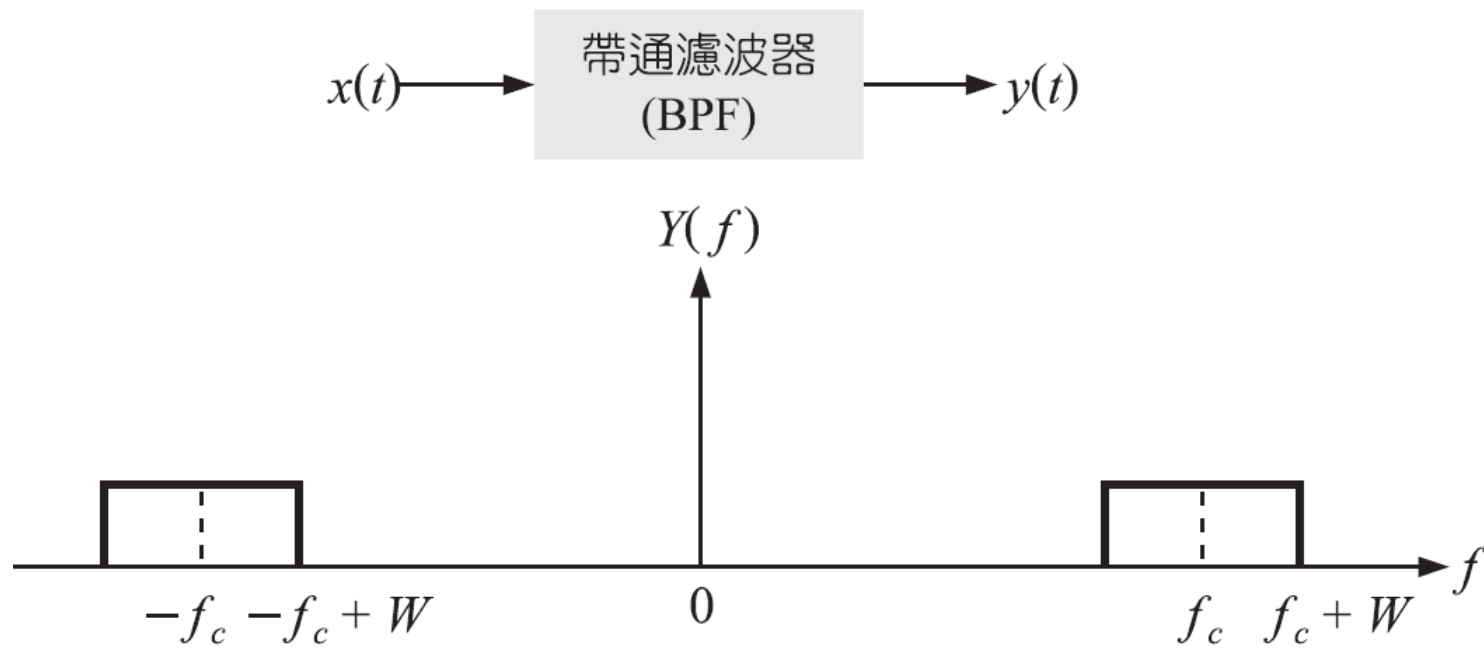


圖 3-125

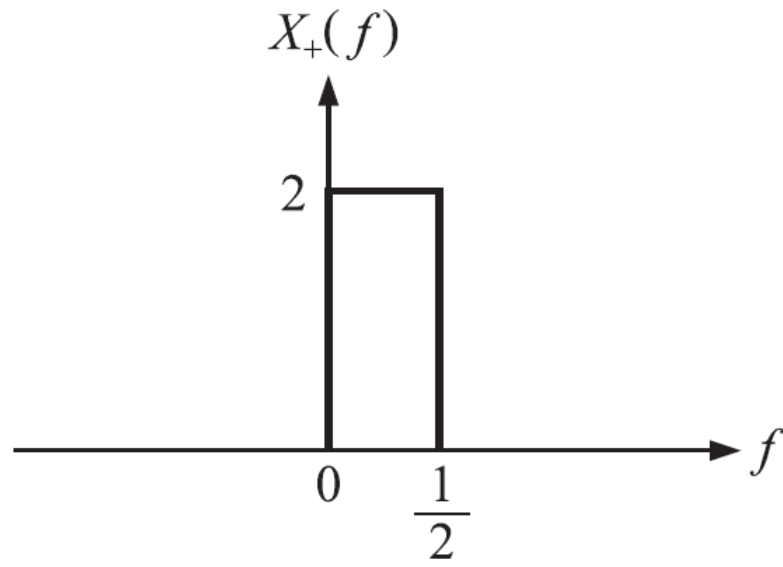


圖 3-126



例題 3-94
EXAMPLE

考慮一個射頻脈波 $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{d}\right)\cos(2\pi f_c t)$ ，且 $df_c \gg 1$ ，即此脈波屬於帶通訊號，求 $x(t)$ 之頻譜、前波封之頻譜、複數波封、波封分別為何？

解 $x(t)$ 之圖形如圖 3-127。

先算出 $X(f) = \frac{Ad}{2} \{\sin c[d(f - f_c)]\} + \sin c[d(f + f_c)]$ ，因

$$\begin{cases} \sin c[d(f + f_c)] \text{ 在 } f > 0 \text{ 時幾乎為 } 0 \\ \sin c[d(f - f_c)] \text{ 在 } f < 0 \text{ 時幾乎為 } 0 \end{cases}$$

故 $X(f)$ 可以近似地表示為

$$X(f) = \begin{cases} \frac{Ad}{2} \sin c[d(f - f_c)], & f > 0 \\ \frac{Ad}{2} \sin c[d(f + f_c)], & f < 0 \end{cases}$$

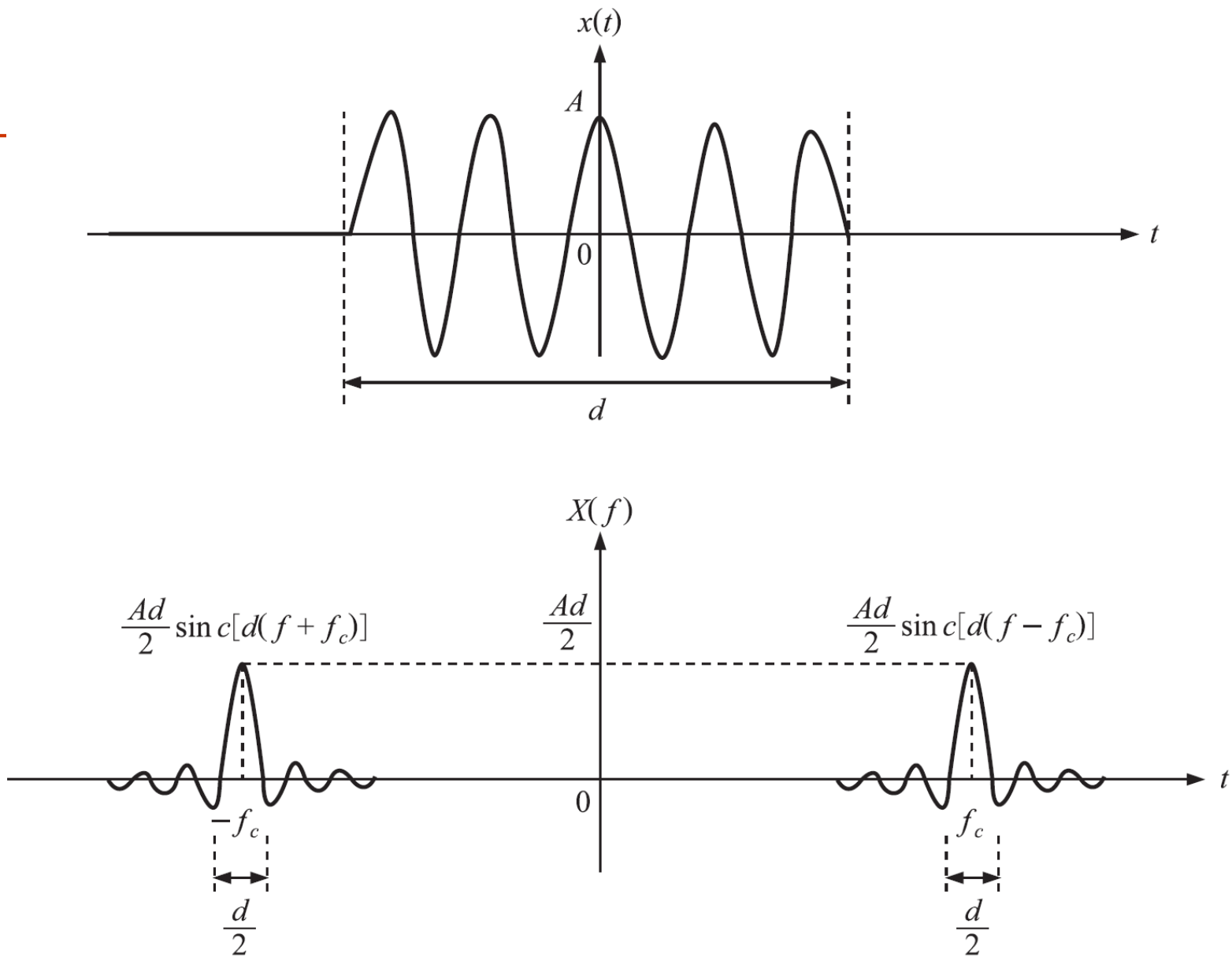



圖 3-127

因此其前波封之頻譜為

$$X_+(f) = \begin{cases} Ad \operatorname{sinc}[d(f - f_c)], & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

將 $X_+(f)$ 左移 f_c 即得複數波封之頻譜為 $\tilde{X}(f) = Ad \operatorname{sinc}(df)$ 。因此得 $x(t)$ 之複數波封為 $\tilde{x}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{X}(f)\} = A\Pi\left(\frac{t}{d}\right)$ ，恰好為實數！故波封 $m(t) = |\tilde{x}(t)| = A\Pi\left(\frac{t}{d}\right)$ 。 



例題 3-95
EXAMPLE

A signal $x(t) = 2d \sin c(dt) \cos(2\pi f_c t)$ where $f_c \gg d$.

- (1) Sketch the spectrum of $x(t)$.
- (2) Sketch the spectrum of $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$.
- (3) Find the complex envelope $\tilde{x}(t)$ and sketch its spectrum, where $x_+(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t}$.

解 (1) 算得 $X(f) = \Pi\left(\frac{f - f_c}{d}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_c}{d}\right)$, 圖形如圖 3-128。

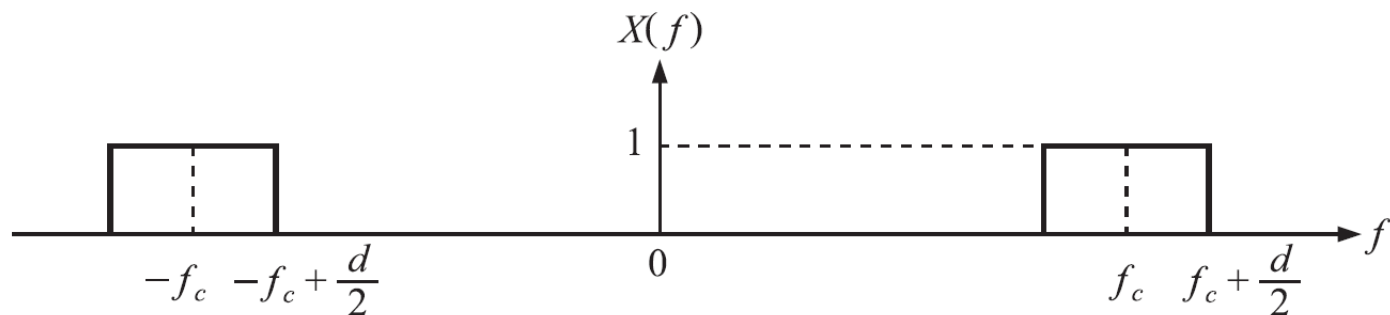


圖 3-128

(2) 得 $X_+(f) = 2\Pi\left(\frac{f-f_c}{d}\right)$ ，圖形如圖 3-129。

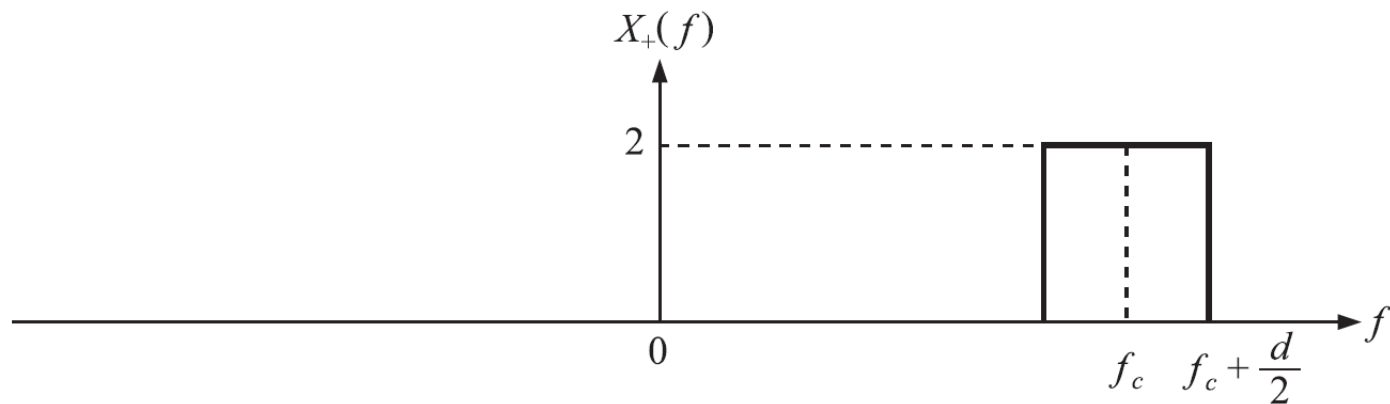


圖 3-129

(3) 得 $\tilde{X}(f) = 2\Pi\left(\frac{f}{d}\right)$ ，故 $\tilde{x}(t) = 2d \sin c(dt)$ ，圖形如圖 3-130。

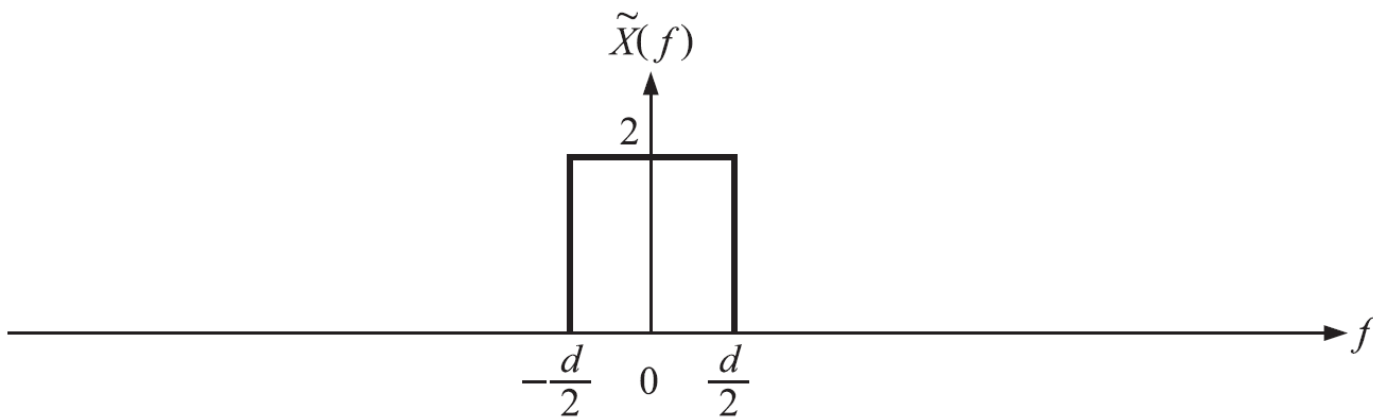


圖 3-130

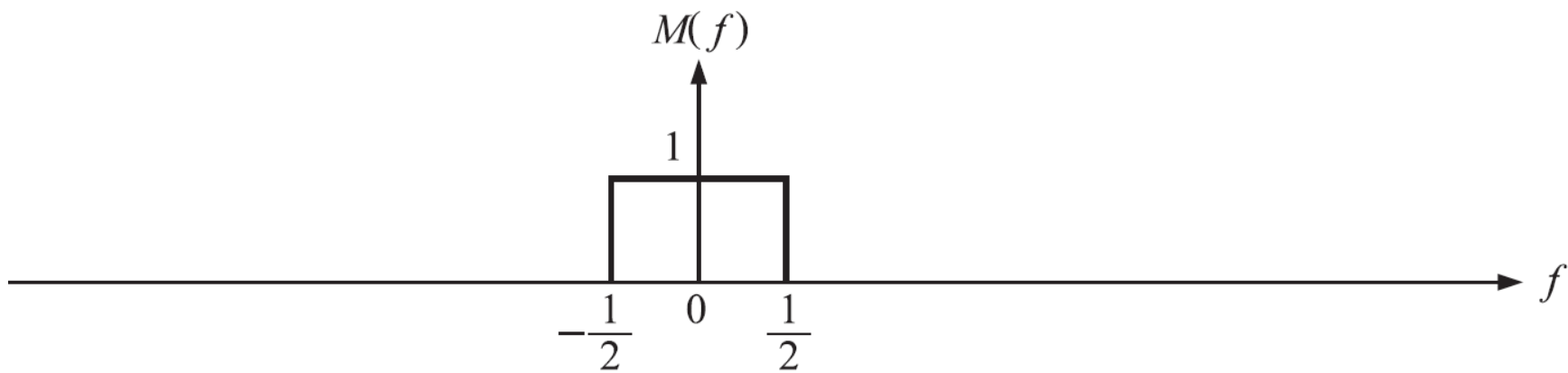


圖 3-131

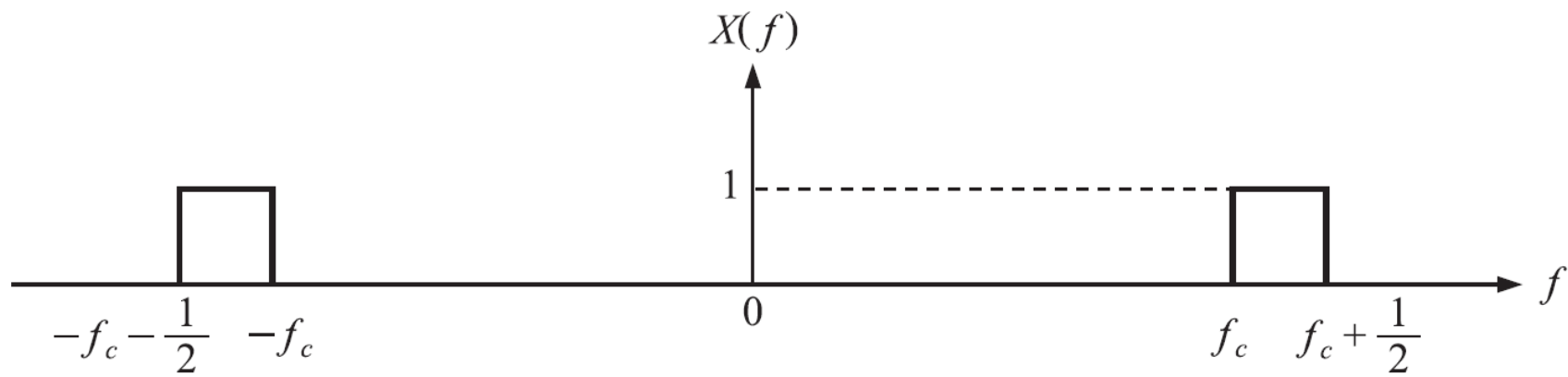


圖 3-132

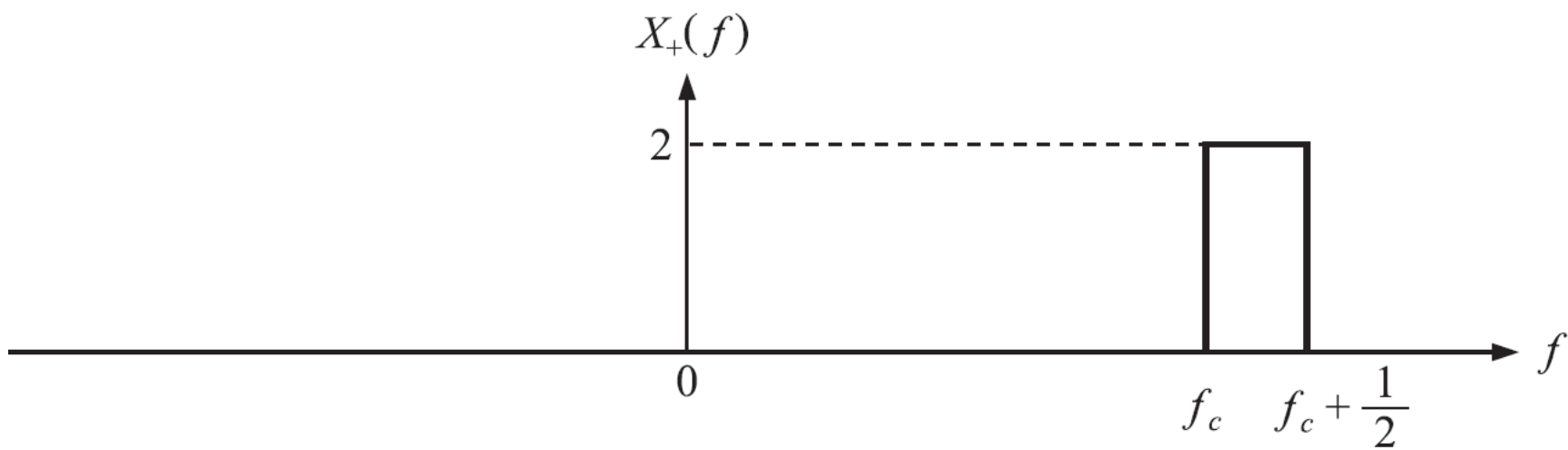


圖 3-133

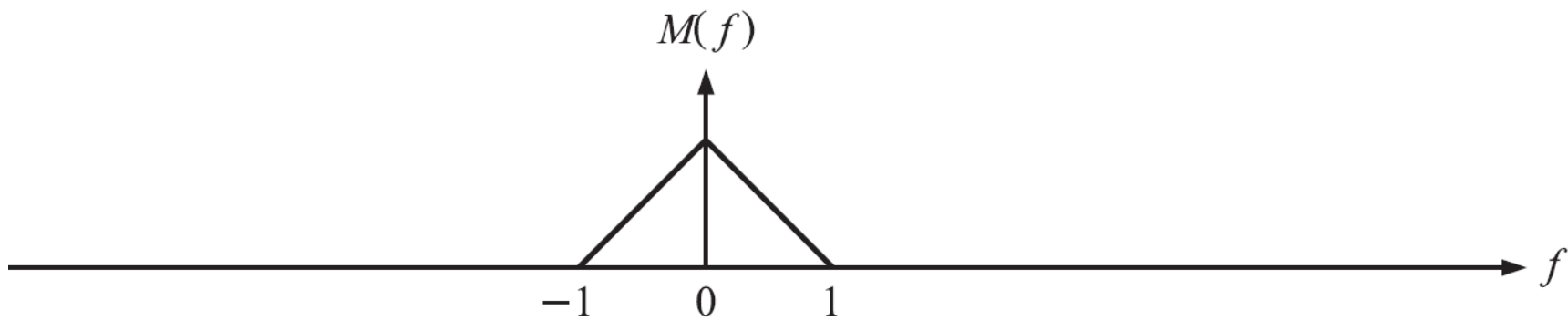


圖 3-134

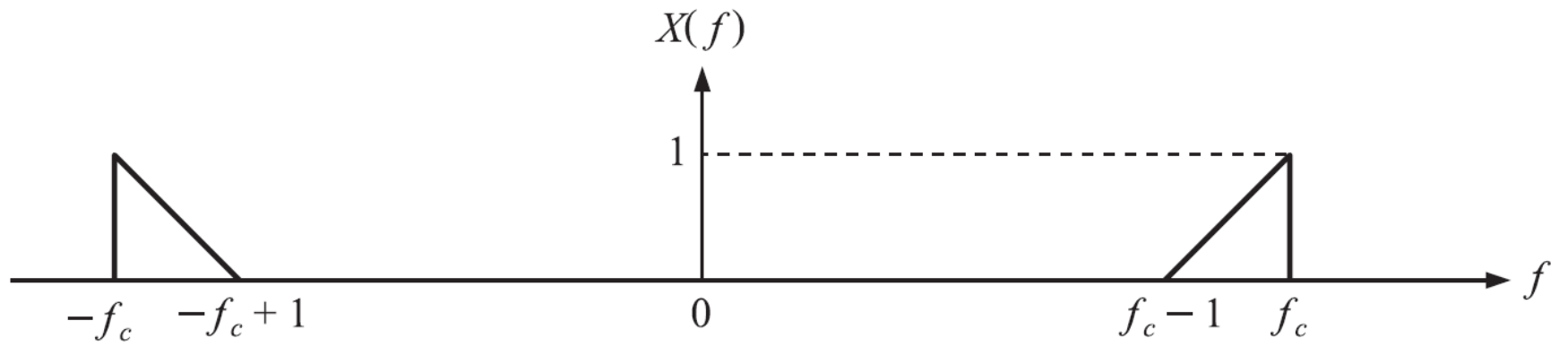


圖 3-135

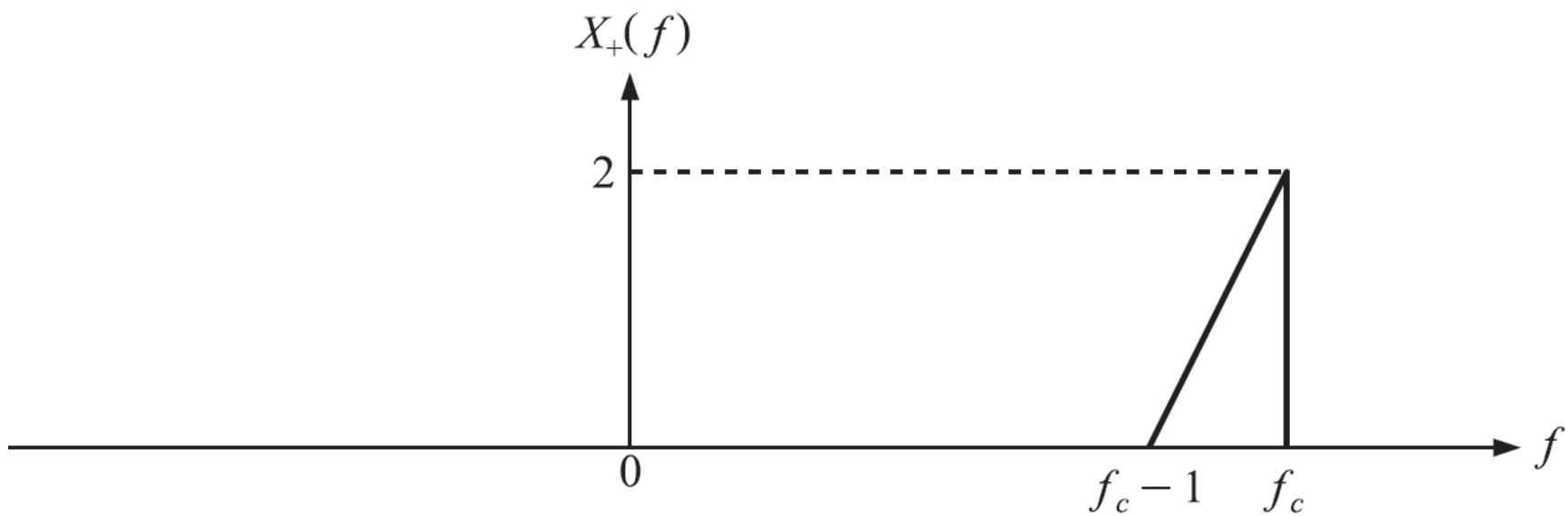
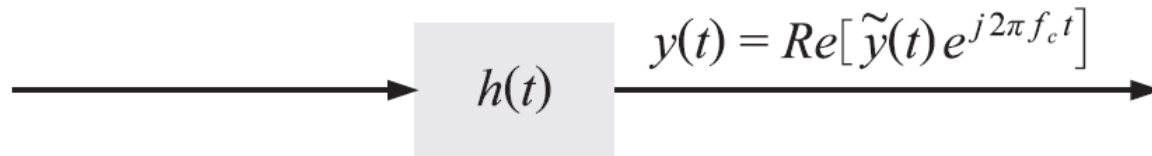
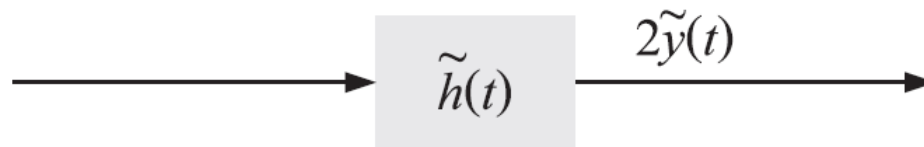


圖 3-136

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$



(a) 帶通濾波器之響應



(b) 等效低通濾波器之響應

圖 3-137

$$\tilde{Y}(f) = \frac{1}{2} \tilde{X}(f) \tilde{H}(f)$$

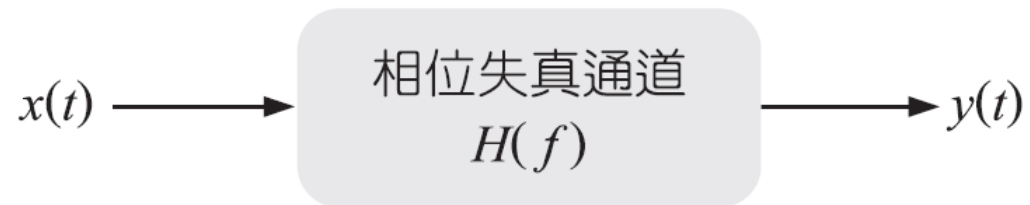


圖 3-138

Given the bandpass signal $x(t) = \sin c(t) \cos (2\pi f_c t)$ which is passed through a bandpass filter with impulse response $h(t) = \sin c^2(t) \sin (2\pi f_c t)$:

- (1) Find the lowpass equivalent of $x(t)$ and $h(t)$.
- (2) Find the lowpass equivalent of the output and from it find the output of $y(t)$.

解 (1) 因 $x(t) = \sin c(t) \cos (2\pi f_c t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$ ，比較後知 $\tilde{x}(t) = \sin c(t)$ 。

因 $h(t) = \sin c^2(t) \sin (2\pi f_c t) = \text{Re}\{\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$ ，比較後知 $\tilde{h}(t) = -j \sin c^2(t)$ 。

(2) 由 $\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\tilde{x}(t) * \tilde{h}(t)$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \tilde{Y}(f) &= \frac{1}{2}\tilde{X}(f)\tilde{H}(f) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{1}\right)\left[-j\Lambda\left(\frac{f}{1}\right)\right] \\ &= \frac{-j}{2}\left[\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{1} + \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{-f}{\frac{1}{2}}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

繪圖如圖 3-139 得知。因此

$$\tilde{y}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{Y}(f)\} = -\frac{j}{4}\sin c(t) - \frac{j}{8}\sin c^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

故 $y(t) = \text{Re}\{\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_c t}\} = \frac{1}{4}\sin c(t) \sin (2\pi f_c t) + \frac{1}{8}\sin c^2(t) \sin (2\pi f_c t)$ 。

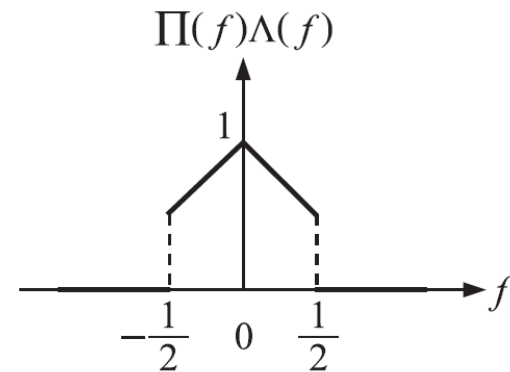


圖 3-139

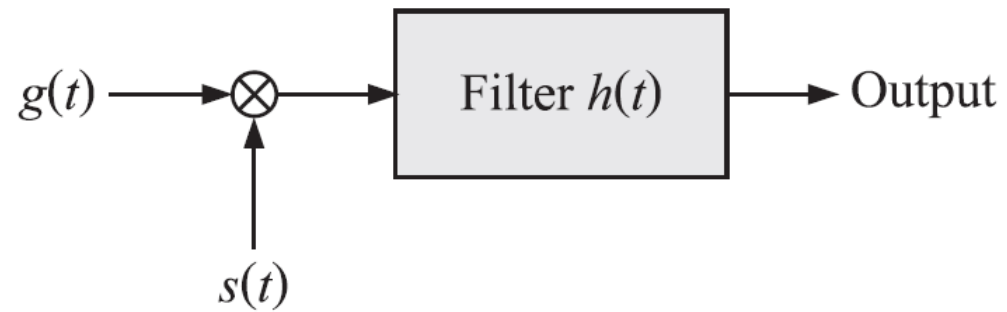


圖 3-140