Ch5 脈波調變

5-1 取樣理論

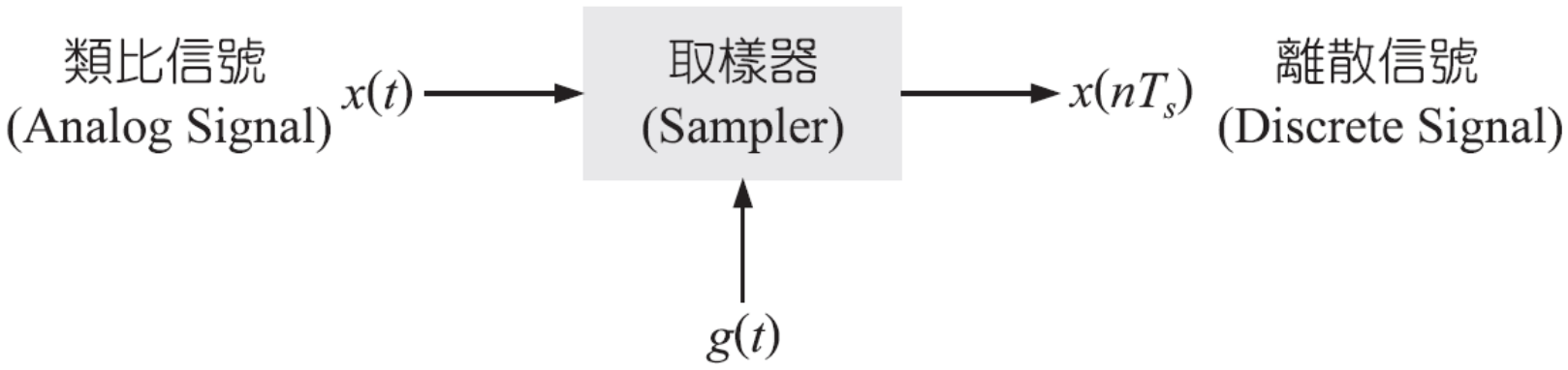

類比信號
(Analog Signal)
$x(t)$
取樣器
(Sampler)
$x(nT_s)$
離散信號
(Discrete Signal)
$g(t)$

圖 5-1

一、理想取樣 (Ideal Sampling)

取樣器即爲乘法器，就理想取樣器而言，$g(t)$ 爲脈衝串 (Impulse Train)：

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

其中 T_s：取樣週期 (Sampling Period)。其圖形如圖 5-2 所示爲等間隔 (T_s) 之脈衝串。

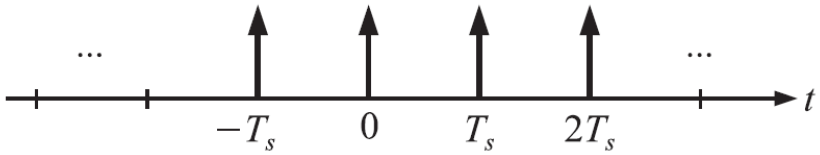


圖 5-2

$$x_s(t) = x(t)g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \tag{5-1}$$

$$G(f) = F\{g(t)\} = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s) \tag{5-2}$$

其中 $f_s = \dfrac{1}{T_s}$ 稱爲**取樣頻率** (Sampling Frequency)。$G(f)$ 仍爲脈衝串但振幅變爲 f_s，頻率間隔爲 f_s。由 (5-1)式可得

$$
\begin{aligned}
X_s(f) = F\{x_s(t)\} &= X(f) * G(f) \\
&= f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi nT_s f}
\end{aligned}
\tag{5-3}
$$

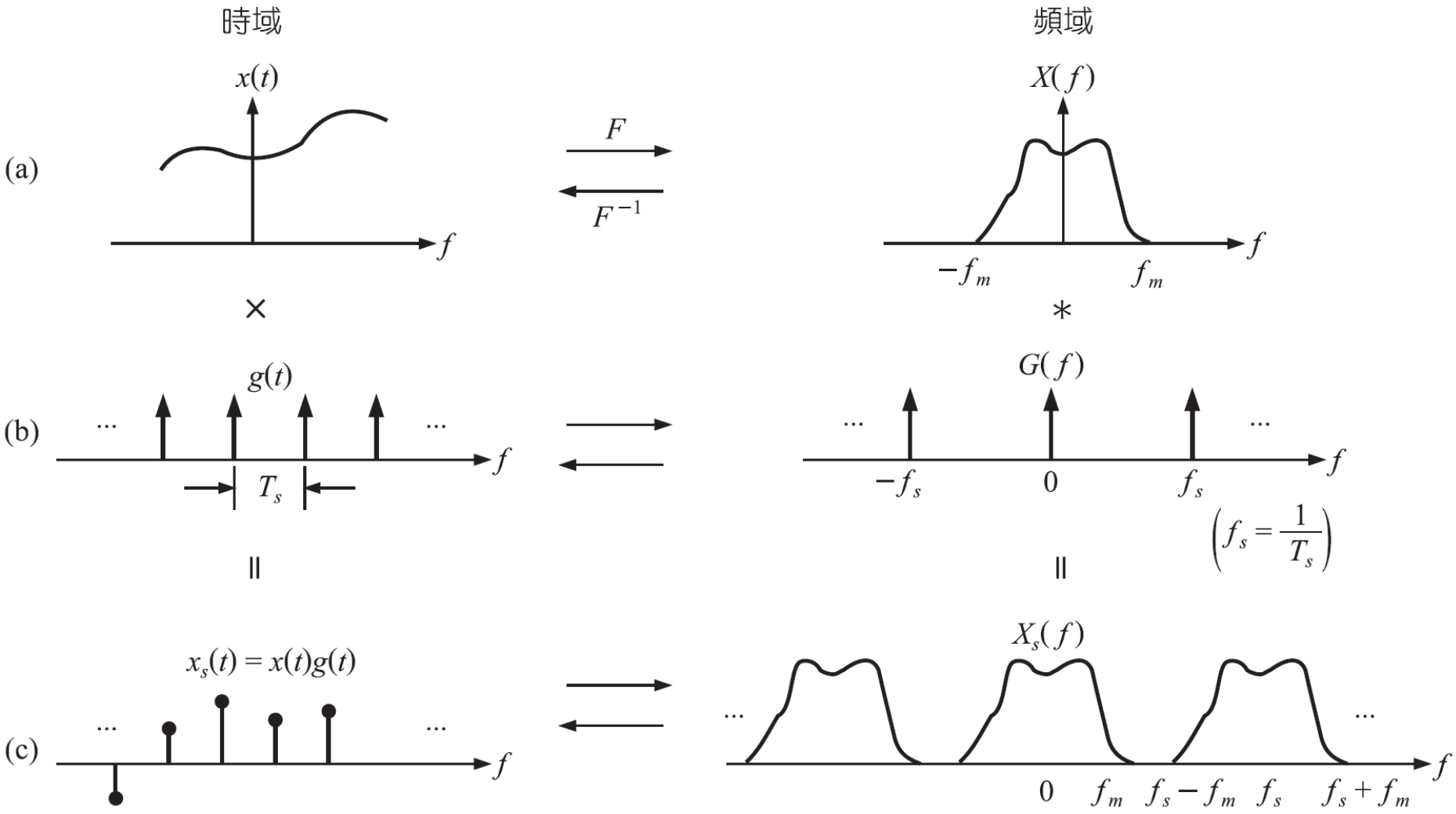

時域
頻域
(a)
x(t)
F
F^{-1}
X(f)
f
−f_m
f_m
×
∗
(b)
g(t)
...
T_s
G(f)
−f_s
0
f_s
(f_s = 1/T_s)
||
(c)
x_s(t) = x(t)g(t)
X_s(f)
0
f_m
f_s − f_m
f_s
f_s + f_m

圖 5-3

如圖 5-3 所示，若 $x(t)$ 爲有限頻寬信號 (當 $|f| \geq f_m$ 時 $X(f)=0$)，則若選擇 $f_s - f_m \geq f_m$，亦即

$$f_s \geq 2f_m \quad \text{或} \quad T_s \leq \frac{1}{2f_m}$$

將可藉由一理想低通濾波器 (LPF) 將信號重建或還原，亦即

$$X(f) = \frac{1}{f_s} X_s(f) rect\left(\frac{f}{2f_m}\right) \tag{5-4}$$

此低通濾波器亦稱爲**重建濾波器** (Reconstruction Filter)。對 (5-4)式取逆傅立葉轉換 (IFT) 可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{f_s} x_s(t) * 2f_m \sin c(2f_m t) \\ &= \frac{2f_m}{f_s} \sum_n x(nT_s)\delta(t - nT_s) * \sin c(2f_m t) \\ &= \frac{2f_m}{f_s} \sum_n x(nT_s) \sin c(2f_m(t - nT_s)) \end{aligned} \tag{5-5}$$

由以上之討論可得**取樣定理** (Sampling Theorem) 如下。

定理 5-1　取樣定理

若有限頻寬 $x(t)$ 之最高頻率為 f_m，將 $x(t)$ 以速率 f_s 均勻取樣，則若 $f_s \geq 2f_m$，$x(t)$ 可利用其離散之取樣值 $x(nT_s)$ 完全重建。其中 $f_s = 2f_m$ 稱為 Nyquist Rate。

Remark

1. 雖然 $x(nT_s)$ 爲離散值，但透過分別乘上連續函數，$\sin c(2f_m(t - nT_s))$，之後再相加，可得到連續函數 $x(t)$。
2. **膺頻效應 (Alias Effect)**：若取樣頻率太低 (Under Sampling)，$f_s < 2f_m$，則會產生頻譜重疊的現象，圖 5-3(c) 將變爲如圖 5-4 所示，稱之爲膺頻效應。顯然的，由於失眞，無法藉由 $x(nT_s)$ 還原回 $x(t)$。

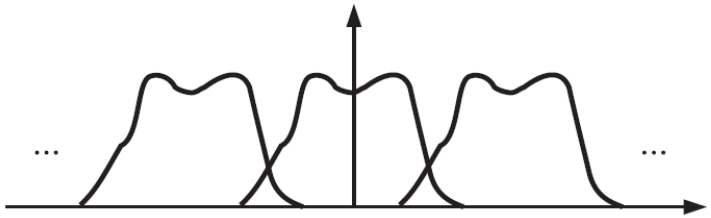


圖 5-4

3. 爲消除膺頻效應，通常在取樣前先利用一 LPF 將信號中少量之高頻成分先行濾除，此 LPF 亦稱爲**抗膺頻濾波器** (Anti-Aliasing Filter)。
4. 由於理想 LPF 實際上無法實現，故通常均以高於 Nyquist Rate 之取樣頻率來取樣，稱之爲過度取樣 (Over Sampling)。

例題 5-2 EXAMPLE

89 交大電子

Assume $x(t) = |\cos(100\pi t)|$:

(1) Find the spectrum of $x(t)$.

(2) What is its Nyquist frequency of $x(t)$?

(3) Find the spectrum of $x^2(t)$.

(4) What is the Nyquist frequency of $x^2(t)$?

(5) If $x(t)$ passes through an ideal lowpass filter with cutoff frequency 120 Hz, find the output signal $y(t)$.

解

(1) $x(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{100}\right)$，其中 $g(t) = \begin{cases} \cos(100\pi t), & -\frac{1}{200} < t < \frac{1}{200} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$，故

$$X(f) = G(f) \sum_{m=-\infty}^{\infty} 100\delta(f - 100m) = 100 \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(100m)\delta(f - 100m)$$

其中 $G(f) = F\{\cos(100\pi t) rect(100t)\} = \frac{1}{2}[\delta(f-50) + \delta(f+50)] * \frac{1}{100}\sin c\left(\frac{f}{100}\right)$，故

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 100G(100m)\delta(f - 100m) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sin c\left(m - \frac{1}{2}\right) + \sin c\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]\delta(f - 100m) \\ &= \frac{2}{\pi}\delta(f) + \frac{2}{3\pi}(\delta(f-100) + \delta(f+100)) - \frac{2}{15\pi}(\delta(f-200) + \delta(f+200)) + \cdots \end{aligned}$$

(2) $f_s = \infty$

(3) $x^2(t) = \cos^2(100\pi t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(200\pi t))$，故

$$F\{x^2(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f - 100) + \frac{1}{4}\delta(f + 100)$$

(4) $f_s = 2 \times 100 = 200\ \text{Hz}$

(5) $X(f) = \frac{2}{\pi}\delta(f) + \frac{2}{3\pi}[\delta(f - 100) + \delta(f + 100)] + \cdots$，所以

$$Y(f) = \frac{2}{\pi}\delta(f) + \frac{2}{3\pi}[\delta(f - 100) + \delta(f + 100)]$$

故 $y(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos(200\pi t)$。

Consider ideal sampling of $x(t) = 64 \sin c(8t) \sin c(4t)$:

(1) Plot $X(f)$.

(2) Let $x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ and $T = 0.01$ second. Plot $X_s(f)$.

(3) Compute the impulse response $h(t)$ of the ideal LPF with smallest cut-off frequency that can be used to reconstruct perfectly the original signal $x(t)$.

解 (1) $X(f) = 64F\{\sin c(8t)\} * F\{\sin c(4t)\}$

$$= 64\left(\frac{1}{8}rect\left(\frac{f}{8}\right)\right) * \left(\frac{1}{4}rect\left(\frac{f}{4}\right)\right)$$

$$= 2rect\left(\frac{f}{8}\right) * rect\left(\frac{f}{4}\right)$$

(2) $X_s(f) = X(f) * \left(\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right)$

$$= 100\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 100n)$$

(3) 理想 LPF

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{100}rect\left(\frac{f}{12}\right) \Rightarrow h(t) = \frac{12\sin c(12t)}{100}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT)$$

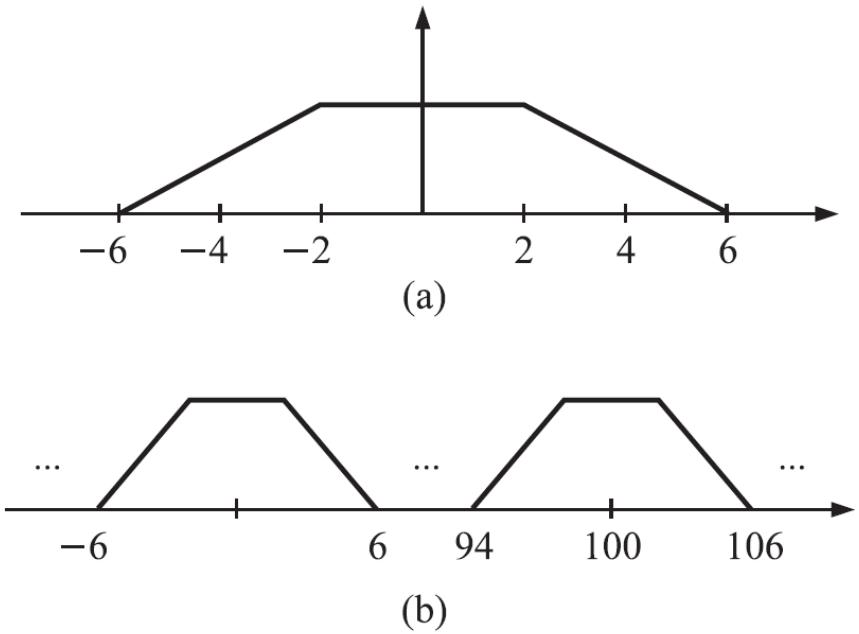


圖 5-5

$x(t) = 10\cos(60\pi t)\cos^2(160\pi t)$ is sampled with rate 400 times per second:

(1) Sketch the frequency spectrum of the sampled signal.

(2) Find the range of permissible cut-off frequency of the ideal LPF used to reconstruct $x(t)$.

解

(1) $$X(f) = F\left\{10\cos(60\pi t)\left[\frac{1+\cos(320\pi t)}{2}\right]\right\}$$

$$= F\left\{5\cos(60\pi t) + \frac{5}{2}\cos(260\pi t) + \frac{5}{2}\cos(380\pi t)\right\}$$

$$= \frac{5}{2}[\delta(f-30)+\delta(f+30)] + \frac{5}{4}[\delta(f-130)+\delta(f+130)+\delta(f-190)+\delta(f+190)]$$

$$X_s(f) = X(f) * 400\sum_n \delta(f-400n) = 400\sum_n X(f-400n)$$

(2) $f_m = 190H_z, f_m \le f_{cut} \le f_s - f_m \Rightarrow 190 < f_{cut} < 210$

例題 5-5 EXAMPLE

$x(t) = 6\cos(10\pi t)$ is sampled at f_s Hz to produce a sampled signal $x_s(t)$.

(1) Find the expression for the spectrum $X_s(f)$ for $x_s(t)$ and plot $X_s(f)$ if $f_s = 7$.

(2) Repeat (1) if $f_s = 14$.

(3) Explain how to reconstruct $x(t)$ from $x_s(t)$ for (1) and (2).

解

(1) $x_s(t) = x(t)\sum_n \delta\left(t - \frac{n}{7}\right)$,

$$x(t) = 6\cos(10\pi t) = 3(\exp(j10\pi t) + \exp(-j10\pi t))$$
$$\Rightarrow X(f) = 3(\delta(f-5) + \delta(f+5)) \Rightarrow f_m = 5$$
$$\Rightarrow X_s(f) = X(f) * 7\sum_m \delta(f-7m) = 7\sum_m X(f-7m)$$
$$= \sum_m 21[\delta(f-5-7m) + \delta(f+5-7m)]$$

(2) $X_s(f) = 14\sum_m X(f-14m) = 42\sum_m [\delta(f-5-14m) + \delta(f+5-14m)]$

(3) 由於 $7 < 2f_m < 14$，故 (1) 中無法還原而 (2) 中可以，只要將 $X_s(f)$ 乘上 $\frac{1}{14}rect\left(\frac{f}{2W}\right)$, $5 < W < 9$ 即可。

例題 5-6 EXAMPLE

90 台科大電子

Consider the signal $z(t) = x(2t)y(t)$, where $x(t)$ and $y(t)$ are band-limited to 12.7 KHz and 31.2 KHz, respectively. Find the Nyquist sampling rate for $z(t)$.

解

$$Z(f) = \frac{1}{2}X\left(\frac{f}{2}\right) * Y(f)$$

故 $z(t)$ 之頻寬為 $W = 12.7\text{ KHz} \times 2 + 31.2\text{ KHz} = 56.6\text{ KHz}$

$$f_s \geq 2W = 2 \times 56.6 = 113.2\text{ KHz}$$

二、平頂取樣 (Flap-Top Sampling)

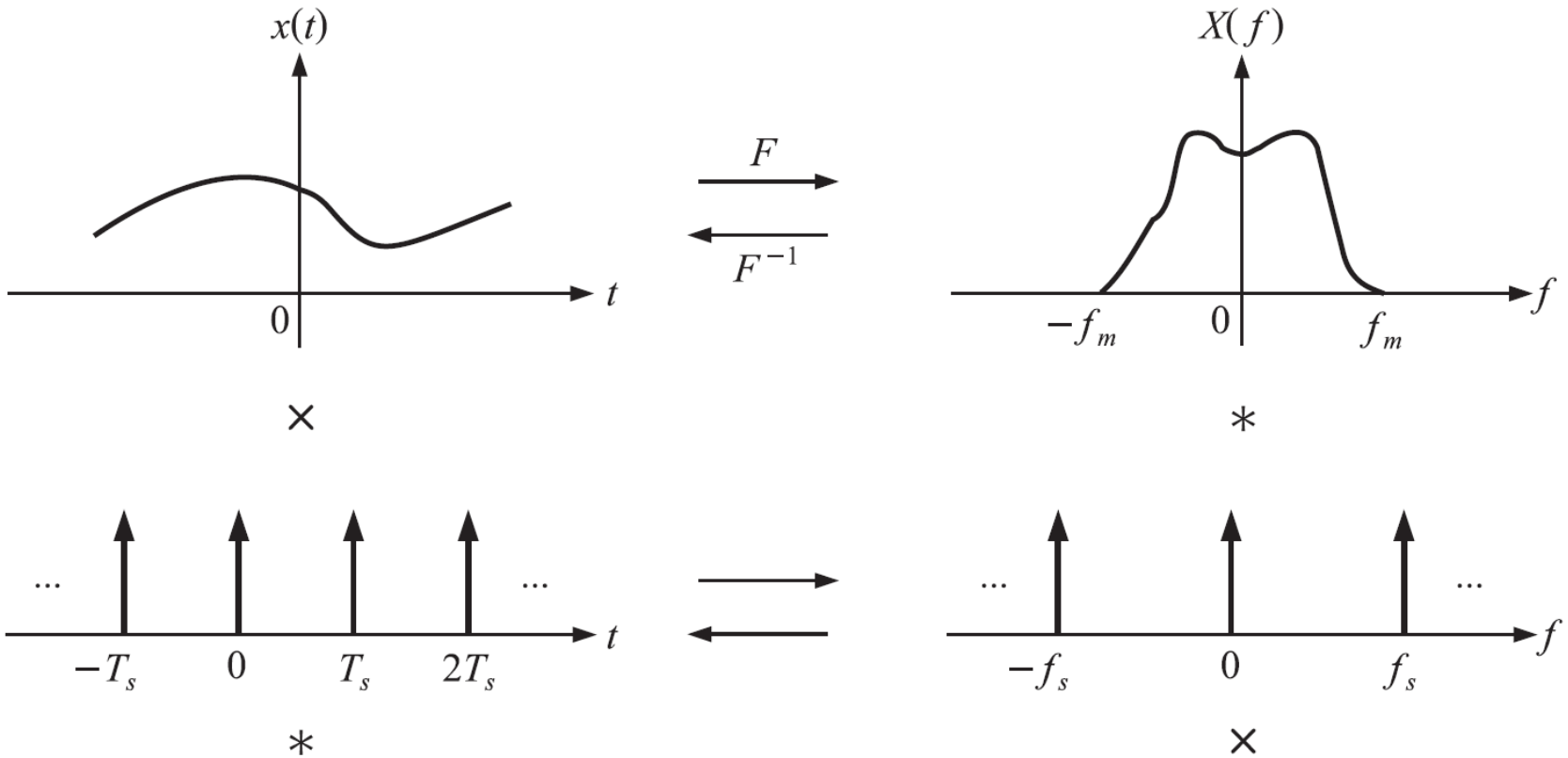
平頂取樣與理想取樣系統之差別在於將取樣之值維持 T 秒，故平頂取樣與理想取樣系統需要一個取樣及保持 (Sample and Hold) 的電路。圖 5-6 表示了平頂取樣器在取樣前後時域以及頻域的波形，讀者可與圖 5-3 比較以了解理想取樣與平頂取樣之差異性。

Remark

1. 整個系統即爲頻寬爲 f_m 之類比信號 $x(t)$ 先經理想取樣後再與方波迴旋積分可得

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \sum_n x(nT_s)h(t-nT_s) = \left[\sum_n x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right] * h(t) \\ &= \left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right] * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)rect\left(\frac{t-nT_s-\frac{T}{2}}{T}\right) \end{aligned} \tag{5-6}$$

$$\begin{aligned} X_F(f) &= \left[X(f) * f_s\sum_n \delta(f-nf_s)\right] T\sin c(fT)e^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)} \\ &= f_s T\sin c(fT)\sum_n X(f-nf_s)e^{-j\pi fT} \end{aligned} \tag{5-7}$$


x(t)
t
0
F
F^{-1}
X(f)
f
−f_m
0
f_m
×
∗
...
...
t
−T_s
0
T_s
2T_s
...
...
f
−f_s
0
f_s
∗
×

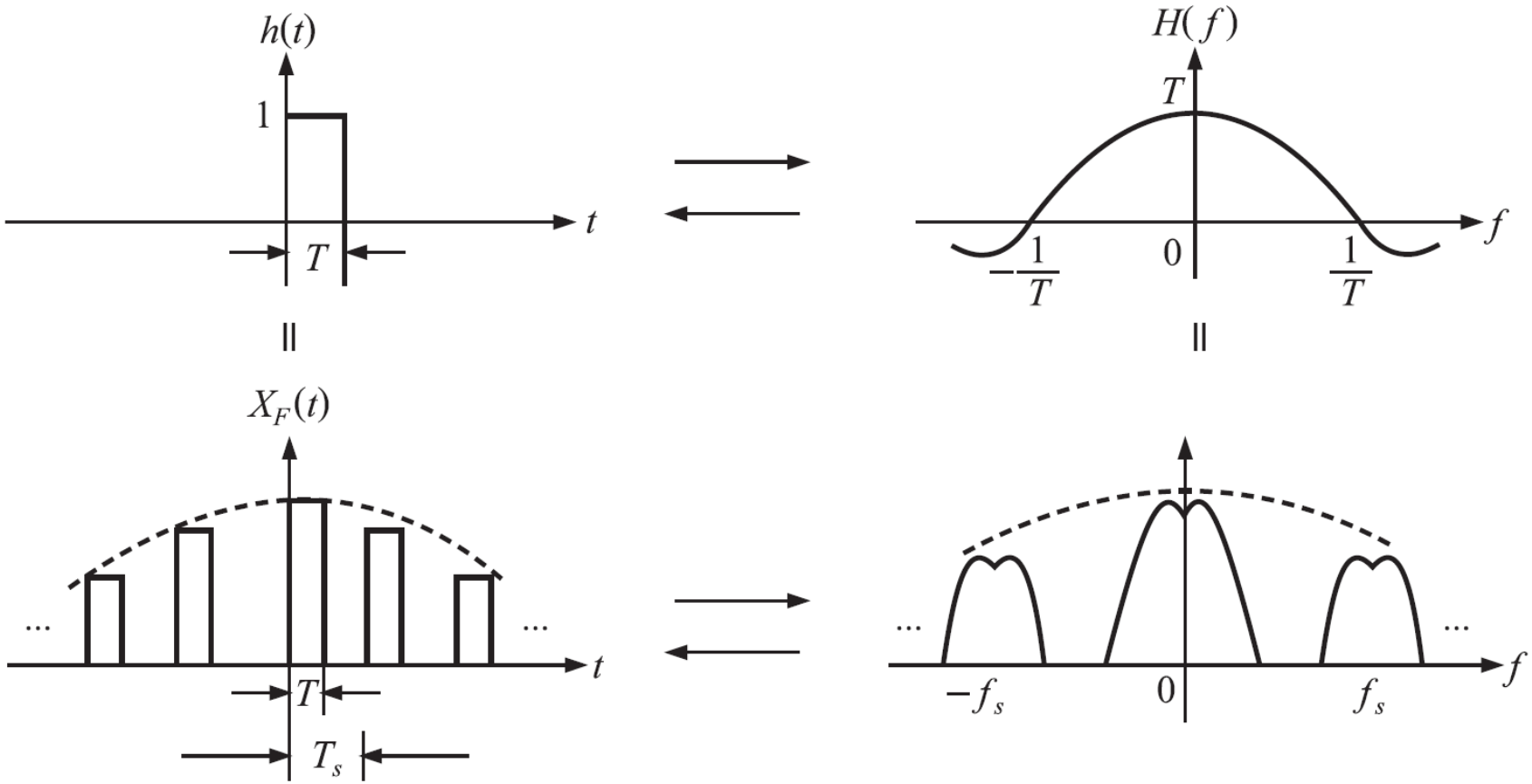


圖 5-6

2. 由於 $H(f)$ 導致波形失真及相位延遲，故經過 LPF 後仍舊無法還原 $x(t)$。解決之道在於 LPF 後加上一**等化器** (Equalizer)，其轉移函數爲

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{H(f)}$$

三、自然取樣 (Natural Sampling)

自然取樣與平頂取樣系統之差別在於自然取樣並非只將取樣之值維持 T 秒，而是每次取樣之時間維持 T 秒。令

$$h(t) = rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \Rightarrow H(f) = T\sin c(fT)e^{-j\pi fT} \tag{5-8}$$

則自然取樣信號之時域 (Time Domain) 表示式爲

$$x_N(t) = x(t)\left[h(t) * \sum_n \delta(t - nT_s)\right] \tag{5-9}$$

故自然取樣信號之頻域 (Frequency Domain) 表示式爲

$$\begin{aligned} X_N(f) &= X(f) * \left[H(f) f_s \sum_n \delta(f - nf_s)\right] \\ &= X(f) * f_s \sum_n H(nf_s)\delta(f - nf_s) \\ &= f_s \sum_n H(nf_s) X(f - nf_s) \end{aligned} \tag{5-10}$$

由於 $H(nf_s) = T\sin c(nf_s T)e^{-j\pi nf_s T} \Rightarrow H(0) = T$，故經由理想之低通濾波器可將信號還原，換言之，使用自然取樣並不會產生失眞的現象。

例題 5-7 EXAMPLE

90 交大電信

A baseband signal $m(t)$ with Fourier transform $M(f)$ is sampled using a flat-top sampler. The sampled pulse width is one half of its sampling period T_s.

(1) Write out the equation of sampler output.

(2) Determine the Fourier transform of the sampler output.

(3) What is the method to completely recover $m(t)$ from the sampler output.

解

(1) $$m_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)rect\left(\frac{t-nT_s-\frac{T_s}{4}}{\frac{T_s}{2}}\right)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(t)\delta(t-nT_s)\right]*rect\left(\frac{t-\frac{T_s}{4}}{\frac{T_s}{2}}\right)$$

(2) $$M_s(f)=\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}\delta\left(f-\frac{m}{T_s}\right)*M(f)\right]\frac{T_s}{2}\sin c\left(\frac{fT_s}{2}\right)\exp\left(-j\frac{\pi fT_s}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m}\sin c\left(\frac{fT_s}{2}\right)M(f-mf_s)\exp\left(-j\frac{\pi fT_s}{2}\right)$$

其中 $f_s=\frac{1}{T_s}$，取樣頻率。

(3) $$m(t)=F^{-1}\left(M_s(f)\cdot rect\left(\frac{f}{2f_m}\right)\frac{2\exp\left(j\frac{\pi fT_s}{2}\right)}{\sin c\left(\frac{fT_s}{2}\right)}\right)$$

其中 f_m 為 $m(t)$ 之最高頻率。

四、帶通訊號之均勻取樣定理 (Uniform Sampling for Bandpass Spectra)

若帶通訊號 $x(t)$ 之頻率上限爲 f_U、頻寬爲 W，且 $f_U \gg W$，則可以採用之取樣頻率爲

$$f_s = \frac{2f_U}{m} \tag{5-11}$$

其中 $m = \left[\frac{f_U}{W}\right]$，即爲不超過 $\frac{f_U}{W}$ 之最大整數。但此處取樣後之訊號必須通過帶通濾波器才可恢復原訊號 $x(t)$。

說明：已知 $x(t)$ 之頻譜如圖 5-7。

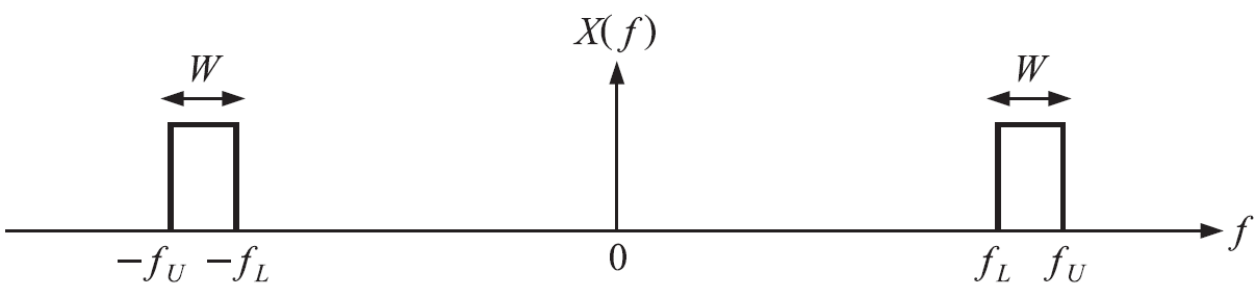


圖 5-7

現欲在 $[-f_L, f_L]$ 中插入 n 組頻譜、且不產生**頻率交疊**，如圖 5-8 所示。

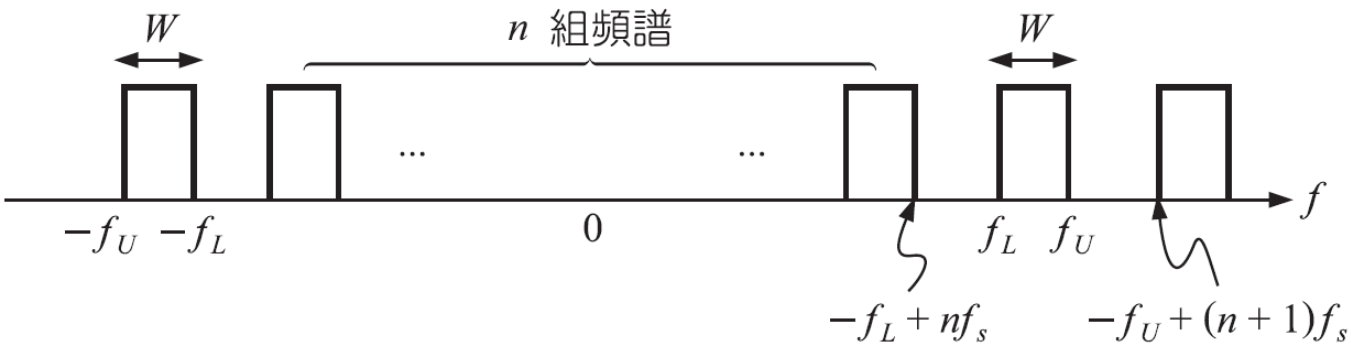


圖 5-8

則需滿足

$$\begin{cases} -f_L + nf_s \le f_L \\ -f_U + (n+1)f_s \ge f_U \end{cases} \tag{5-12}$$

整理得 $\begin{cases} f_s \le \dfrac{2f_L}{n} \\ f_s \ge \dfrac{2f_U}{n+1} \end{cases}$，即

$$\frac{2f_U}{n+1} \le f_s \le \frac{2f_L}{n} \tag{5-13}$$

如何決定 n？將 $f_L = f_U - W$ 代入上式得 $\dfrac{2f_U}{n+1} \le f_s \le \dfrac{2(f_U - W)}{n}$，即

$$\frac{2W}{n} \le \frac{2f_U}{n} - \frac{2f_U}{n+1}$$

$$\Rightarrow W \le \frac{f_U}{n+1} \Rightarrow m = n+1 \le \frac{f_U}{W} \tag{5-14}$$

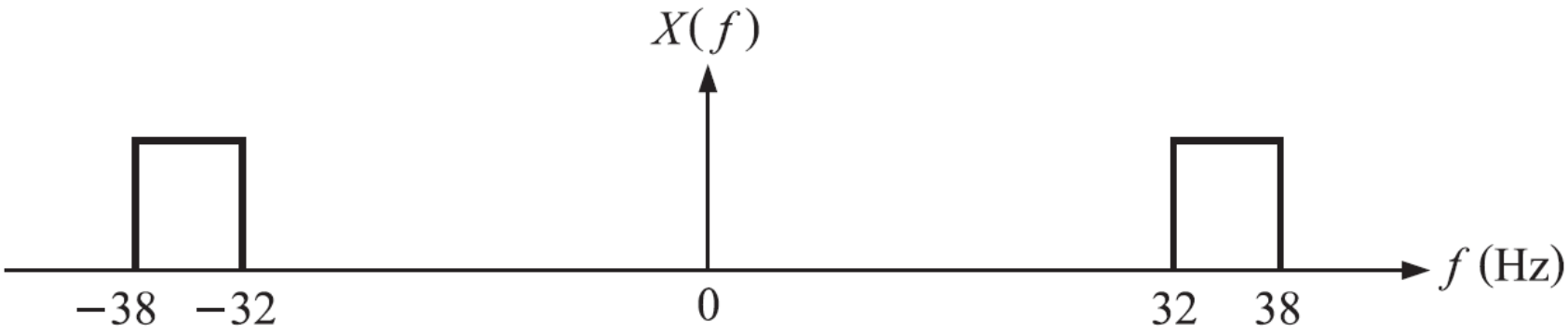


圖 5-9

例題 5-10 EXAMPLE

Specify the Nyquist sampling rate for the following signals:

(1) $x(t) = \sin c(100t) + \sin c^2(400t)$

(2) $x(t)$ with spectrum shown in Fig. 5-10.

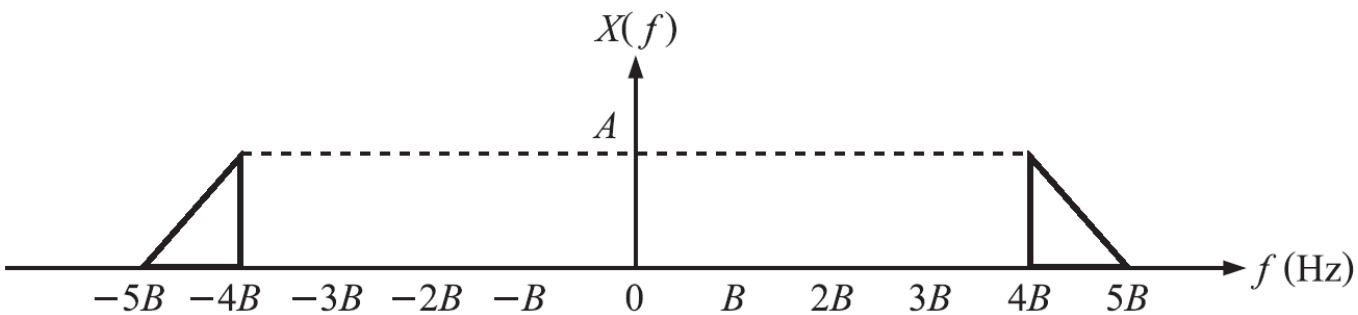


圖 5-10

解 (1) $\Im\{\sin c(100t) + \sin c^2(400t)\} = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{100}\right) + \frac{1}{400}\Lambda\left(\frac{f}{400}\right)$，以最大頻率為基準！故 Nyquist Sampling Rate $= 2 \times 400 = 800$ Hz。

(2) 若採用低通取樣，則 $f_s = 2 \times 5B = 10B$ Hz。

若採用帶通取樣，則 $m = \left[\frac{5B}{5B - 4B}\right] = \left[\frac{5B}{B}\right] = 5$，故 $f_s = \frac{2 \times 5B}{5} = 2B$ Hz

即最小的取樣頻率為 $2B$ Hz，但重建時需使用帶通濾波器。

例題 5-13 EXAMPLE

We consider that a bandlimited analog signal $s_a(t)$ and a discrete-time signal $s(n) = s_a(nT)$ is constructed from $s_a(t)$ by periodic sampling with period = T.

(1) Derive the relationship between the Fourier transform of $s_a(t)$ and the Fourier transform of $s(n)$.

(2) Find the required condition for taking the samples $s(n)$ from $s_a(t)$ which is a lowpass signal with the highest frequency = f_0 if we want to recover $s_a(t)$ from its samples $s(n)$.

(3) Derive the interpolation formula for representing $s_a(t)$ in trems of $s(n)$.

解

(1) 令 $\Im\{s_a(t)\} = S_a(f)$，因 $s(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT)\delta(t-nT)$，故

$$\Im\{s(n)\} = \Im\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT)\delta(t-nT)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s S_a(f-nf_s), f_s = \frac{1}{T}$$

(2) 只要 $f_s \geq 2f_0$。

(3) $s_a(t) = s(n) * h(t) = s(n) * 2Tf_c \sin c(2f_c t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT)2Tf_c \sin c[2f_c(t-nT)]$

5-2 量化

如圖 5-11 所示，經過取樣之信號，在時間上爲離散，但其值仍爲連續，因此量化器之目的在使取樣值僅可能爲某些特定值。

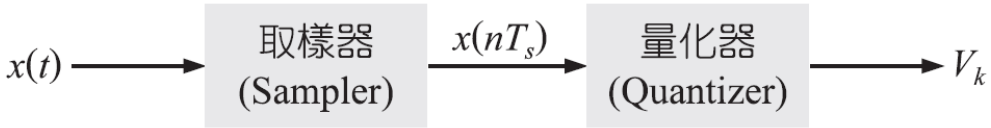


圖 5-11

量化器將取樣器輸出轉換爲特定之離散信號。以圖 5-12 爲例，橫軸爲輸入信號 (取樣器之輸出)，其值具連續性，而縱軸爲量化器輸出，其值僅爲某些特定之位階。定義輸入信號範圍爲 $[-V_p, V_p]$，L 爲量化後之階數，v_k 爲第 k 個位階之值，$\Delta_k = v_k - v_{k-1}$ 代表第 k 個**位階間隔** (Step Size)。

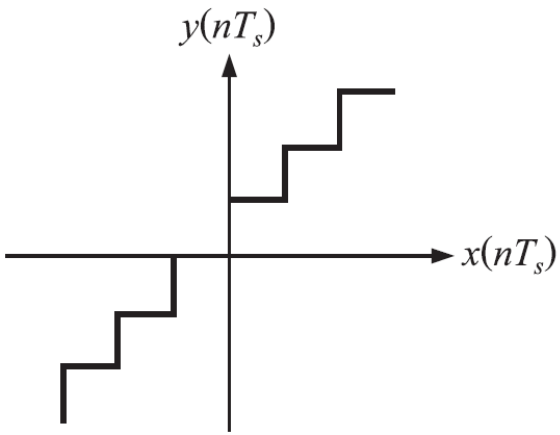


圖 5-12

一、均勻量化器 (Uniform Quantizer)

若 $\Delta_k = \Delta, \forall k$，亦即位階間隔爲一常數。例如：$V_p = 4$ volt, $L = 8$，則 $\Delta = \dfrac{4-(-4)}{8} = 1$。

換言之，量化後之數值分別爲

$$\{-3.5V, -2.5V, -1.5V, -0.5V, 0.5V, 1.5V, 2.5V, 3.5V\}$$

Remark

1. 均勻量化器亦稱爲**線性量化器** (Linear Quantizer)。

2. $$\Delta = \frac{2V_p}{L} \tag{5-15}$$

3. 使用量化器必導致量化誤差，亦即輸入之連續振幅信號與輸出之離散信號 v_k 之差值，顯然的，量化誤差可藉由增大 L 或減小位階間隔而降低。以均勻量化爲例，量化誤差 Q 可視爲介於 $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$ 之均勻 (Uniform) 分布隨機變數 $Q \sim U\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$，其機率密度函數 (PDF) 爲

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < q < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} \tag{5-16}$$

由 (5-16)式可求得其期望值及變異數爲

$$\mu_Q = 0$$

$$\sigma_Q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} q^2 \frac{1}{\Delta} dq = \frac{\Delta^2}{12} \tag{5-17}$$

誠如預期，此值隨 Δ 之增加而變大，我們可進一步求出量化器輸出端之最大訊號功率與訊雜功率比：

$$(\mathrm{SNR})_{O,peak} = \frac{\text{訊號峰值功率}}{\text{雜訊功率}} = \frac{\left(\frac{L\Delta}{2}\right)^2}{\frac{\Delta^2}{12}} = 3L^2 \tag{5-18}$$

4. 若 L 增加，則用來代表其取樣值之位元 (bits) 數目必須增加，則數據傳輸率增加，則系統需要較大之傳輸頻寬，故 L 之值必須在節省頻寬與降低量化誤差之間尋求妥協。

5. 將 (5-15)式分子信號功率以 P 表示之，$L = 2^l$ (l-bits 量化器)，則 $\Delta = \dfrac{2V_p}{2^l}$，故 (5-18)式可改寫爲

$$(\mathrm{SNR})_O = \frac{3P}{V_p^2} \times 2^{2l} = 10\log_{10}\left(\frac{3P}{V_p^2}\right) + 6l \quad (\mathrm{dB}) \tag{5-19}$$

換言之，每增加 1 個位元，$(\mathrm{SNR})_O$ 可獲得 6 dB 之改善。

6. (1) 若輸入爲弦波信號 $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$，則 $P = \dfrac{A_m^2}{2}$，且 $V_p = A_m$，代入 (5-19)式可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{SNR})_O &= 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) + 6l \quad (\mathrm{dB}) \\ &\approx 1.8 + 6l \quad (\mathrm{dB})\end{aligned} \tag{5-20}$$

(2) 若輸入爲均值爲 0 之穩定隨機程序 (zero-mean, stationary random process)，且在任一時間點均爲一致分布 $X(t_0) \sim U(-A_m, A_m)$，故

$$P = E[X^2] = \int_{-A_m}^{A_m} x^2 \frac{1}{2A_m} dx = \frac{A_m^2}{3} \tag{5-21}$$

$$V_P = A_m$$

故

$$(\mathrm{SNR})_O = 6l \quad (\mathrm{dB}) \tag{5-22}$$

■

例題 5-15 EXAMPLE

88 台科大

A sinusoidal signal wave, $A_m \cos(2\pi f_0 t)$, is to be sampled, uniformly quantized and digitalized by l-bit encoder (i.e., l-bits/sample):

(1) Find the $(\text{SNR})_O$, the signal-to-quantization noise-ratio, of this uniform quantizer.

(2) Calculate the $(\text{SNR})_O$ in dB for the case of $l = 6$ and $l = 9$, respectively.

解

(1) $\sigma_Q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} q^2 \, dq = \frac{\Delta^2}{12}$

均勻量化 $\Rightarrow \Delta = \frac{2A_m}{L} = \frac{2A_m}{2^l}$，故 $(\text{SNR})_O = \frac{\frac{A_m^2}{2}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{3}{2} \times 2^{2l}$

(2) 共 $l = 6 \Rightarrow (\text{SNR})_O = 1.8 + 6 \times l\,(\text{dB}) = 37.8\,(\text{dB})$

$l = 9 \Rightarrow (\text{SNR})_O = 1.8 + 6 \times l\,(\text{dB}) = 55.8\,(\text{dB})$

例題 5-16 EXAMPLE

91 台科大

Consider an audio signal $s(t) = 3\cos(500\pi t)$:

(1) Find the mean square error of the quantization.

(2) Find the signal-to-quantization noise-ratio of this uniform quantizer when this signal is quantized by using 10-bit PCM.

(3) How many bits of quantization are needed to achieve a signal-to-quantization noise-ratio of at least 40 dB ?

解

(1) $\sigma_Q^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} q^2\, dq = \frac{\Delta^2}{12}$

(2) $l = 10 \Rightarrow (\text{SNR})_O = 1.8 + 6l\ (\text{dB}) = 61.8\ (\text{dB})$

(3) $6l + 1.8 > 40\ (\text{dB}) \Rightarrow l \geq 7\ (\text{bits})$

三、強健型量化器 (Robust Quantizer)

若輸入之類比信號爲語音 (Speech)，由於絕大部分的時間，語音信號均爲低的 rms 值，若使用均勻量化器將導致訊雜比在信號振幅低時遠小於信號振幅高時。要解決上述問題 (使得訊雜比一致)，必須對微弱的輸入信號進行精細的量化，反之，對於較強的信號，則可容許較大間隔之 Δ，換言之，**非均勻量化器** (Non-Uniform Quantizer) 之目的在於改善微弱信號之 $(SNR)_o$，使得訊雜比對所有的輸入信號而言均爲常數。

在有關均勻量化器的分析中可得知，量化雜訊功率爲定值 (只與位階間隔有關，與輸入信號無關)，故當輸入信號功率低時，SNR 便跟著降低。因此在實用上，我們必須設計出即便在大範圍的輸入功率變化下，訊號與量化雜訊功率比仍能維持在一固定且足夠大之值，這樣的量化器爲強健型量化器。

顯然的，強健型量化器必須爲非均勻量化，亦即在輸入信號較微弱的部分減小位階間隔，而輸入信號較強的部分則可利用較大之位階間隔，但非均勻量化器因標準難以決定，故不易製作，反之，均勻量化器則易製作、成本低，這樣的設計理念可藉由**壓縮器** (Compressor) 將振幅非均勻分布之輸入信號轉成振幅均勻分布之信號，接著均勻量化器才可進一步進行處理。簡言之，壓縮器之功能即將振幅非均勻分布之輸入信號轉成振幅均勻分布之信號。由於此時之信號已經與原始信號不同或產生失眞，故在接收機部分則需要使用**伸展器** (Expander) 將信號還原。顯然的，壓縮器與伸展器作用互補，換言之，壓縮器與伸展器必須配合使用，有一個合成之名詞爲 “Compandor” = Compressor + Expander。圖 5-13 爲強健型或非均勻量化器架構圖，其中壓縮器與均勻量化器置於發射端，而伸展器則置於接收端。

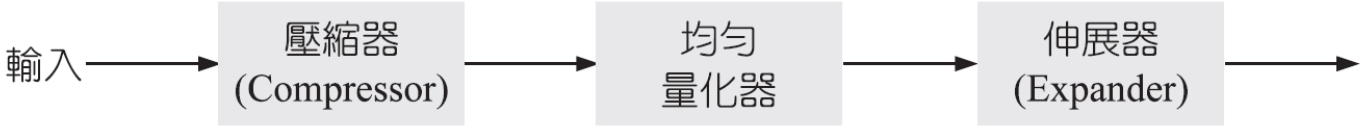
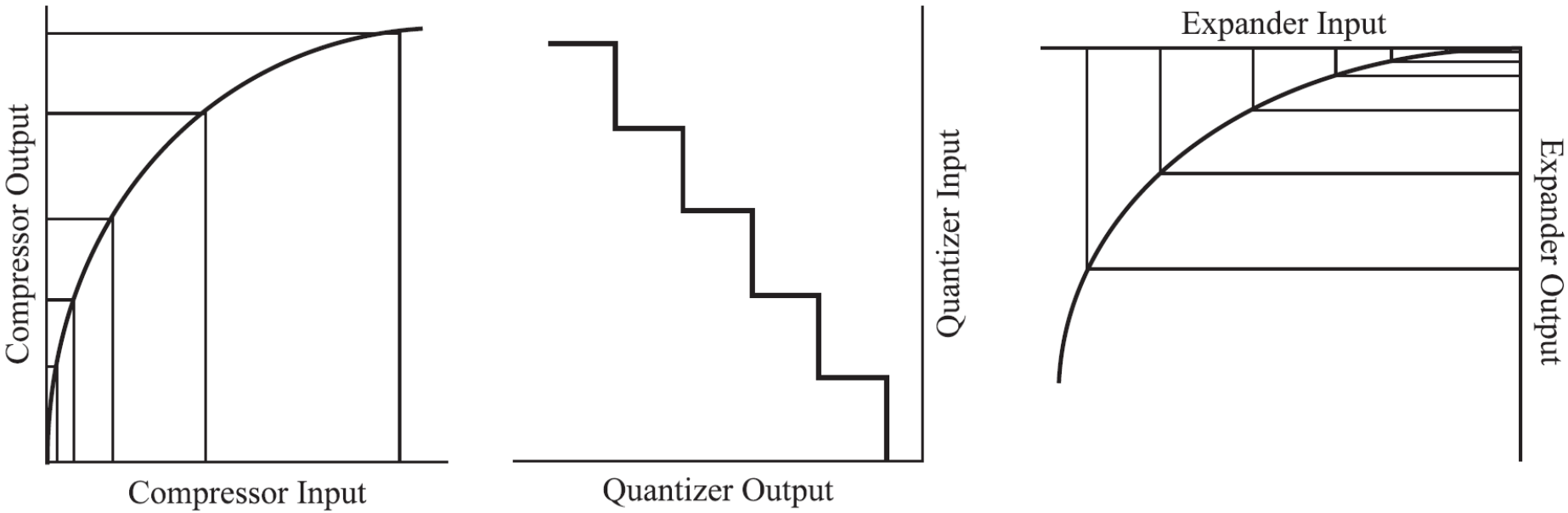


圖 5-13

圖 5-14 爲壓縮器、均勻量化器以及伸展器之輸出、輸入轉換圖。如圖所示，壓縮器輸入爲非均勻區間，其輸出則爲均勻區間，並且爲均勻量化器之輸入。

如圖 5-14 所示，若壓縮器之輸出/輸入轉移函數爲 $g(x)$，則 $g(x)$ 必須爲一對一且可逆，此外由於伸展器與壓縮器爲互補，故伸展器之轉移函數必須爲 $g^{-1}(x)$，其中 $g(x)g^{-1}(x) = 1$。



(a) Compressor之輸入與輸出關係圖

(b) 均勻量化器之輸入與輸出關係圖

(c) Expander之輸入與輸出關係圖

圖 5-14 非均勻量化器之輸入與輸出關係圖

Consider a continuous input signal having the following PDF:

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(1) If a uniform (linear) 8-level quantizer is used, determine the step size.

(2) Determine the nonlinear quantizer step levels required to make the quantized signal levels equiprobable.

解 (1) $\Delta=\dfrac{1-(-1)}{8}=\dfrac{1}{4}$

(2) 令 $g(x)=\text{CDF of } X=F_X(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} f_X(t)\,dt=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1\le x<0\\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$

$$Y=g(X)=F_X(x)\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F_X(X)\le y)=P(X\le F_X^{-1}(y))=F_X(F_X^{-1}(y))=y$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=1,\quad 0\le y\le 1$$

故 $Y\sim U(0,1)$。

5-3 脈波編碼調變

將量化器輸出之離散信號進行編碼之後，即可得數位信號，整個過程稱之為**脈波編碼調變** (Pulse-Code Modulation, PCM)。

圖 5-15

如圖 5-15 所示，編碼器之作用為將量化器輸出之離散信號 $\{m_k\}_{k=1,\cdots,L}$ 轉換為二進位碼，亦即數位信號，其目的在使被傳送信號更能抵抗雜訊干擾，且易於做加密多工等的處理。量化位階 L 越大，則用來表示每個取樣值所需之位元數就越多。針對均勻量化器而言，我們推導出允許的量化誤差與每個取樣值所需要的位元數之關係：

$$
\begin{aligned}
\text{令 } V_{PP} &= V_P - (-V_P)\text{：峰對峰值電壓} \\
&= 2V_P \\
l &= \text{bits/sample},\ L = 2^l
\end{aligned}
$$

若要求量化誤差之範圍滿足 $|E| \le \rho V_{PP}$，其中 $0 < \rho < 1$，則

$$|E|_{\max} = \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{2}\frac{V_{PP}}{L} \le \rho V_{PP}$$

則

$$L = 2^l \ge \frac{1}{2\rho} \tag{5-35}$$

故

$$l \ge \log_2 \frac{1}{2\rho} \tag{5-36}$$

例題 5-21 EXAMPLE

92 成大電通

A signal can be modeled as a lowpass stationary process $x(t)$ whose PDF at any time is $f_X(x) = \Lambda(x)$, where $\Lambda(x)$ is the triangular function. The BW of this signal is 10 KHz, and it is desired to transmit it using a PCM system with a uniform quantizer.

(1) If 16-level quantizer is employed, what are the resulting lowest bit rate and the corresponding signal-to-quantization noise-ratio (in dB)?

(2) If the available transmission rate of the channel is 120 Kbps, what is the highest achievable signal-to-quantization noise-ratio (in dB)?

解 (1) $L = 16 = 2^l \Rightarrow l = 4$ bits

$$f_s \geq 20 \text{ KHz} \Rightarrow R_b = l \times f_s \geq 4 \times 20 \text{ KHz} = 80 \text{ Kbps}$$

$$P_X = E[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \Lambda(x)\, dx = \frac{1}{6}$$

$$\Delta = \frac{1-(-1)}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow (\text{SNR})_O = \frac{P_x}{\frac{1}{12}\Delta^2} = 21 \text{ (dB)}$$

(2) $R_b = 120 \text{ Kbps} = l \times f_s \Rightarrow l = 6 \text{ bits} \Rightarrow L = 2^l = 64 \Rightarrow \Delta = \frac{2}{64}$

$$(\text{SNR})_O = \frac{P_x}{\frac{1}{12}\Delta^2} \approx 33 \text{ dB}$$

5-4 脈波調變

二、數位 (M-ary) 脈波調變

類比信號經過取樣，量化以及編碼之後得到二位元 (0, 1) 數位信號，收集 k 個 “bits” 以形成一個 “Symbol”，故此 Symbol 有 $M = 2^k$ 種可能的值。

1. 在 M-ary PAM 中，將 $M = 2^k$ 種脈波振幅分別對應到 M 個可能的 Symbol 值。
2. 在 M-ary PWM 中，將 $M = 2^k$ 種脈波寬度分別對應到 M 個可能的 Symbol 值。
3. 在 M-ary PPM 中，將 $M = 2^k$ 種脈波位置分別對應到 M 個可能的 Symbol 值。

Remark

1. 顯然的，若 Bit Rate 爲 R bits/sec，則 Symbol Rate 可降低爲 $\frac{R}{k}$ symbols/sec，因此所需要的傳輸頻寬可降低 k 倍，換言之，M-ary 系統對於頻寬之使用效率較大。

例題 5-22 EXAMPLE

一語音信號之最高頻為 $f_m = 3$ KHz，量化誤差必須在 V_{PP} 之 $\pm 1\%$ 之內，使用 16-ary PAM 調變，求：

(1) 最小之取樣頻率為何？　　(2) 每個取樣值至少需要多少位元表示？

(3) 脈波或 Symbol Rate 為何？

解 (1) $f_s \geq 2f_m = 6$ KHz (每秒需取樣 6000 次)。

(2) $\rho = 0.01,\ l \geq \log_2 \dfrac{1}{2\rho} = \log_2 50 \approx 5.6$，故 min 6 bits/sample。

(3) Bit Rate $R = lf_s = 3600$ bits/sec,　1 Symbol = 4 Bits (16 level)

故 $\dfrac{36000}{4} = 9000$ symbols/sec。

5-5 分時多工

分時多工 (Time-Division Multiplexing, TDM) 之工作原理爲在時間上分割成許多時槽 (Time Slot)，每個時槽僅提供給一個用戶使用，以免不同用戶之間所傳輸之信號產生碰撞。

- **優點**：在 TDM 系統中，所有用戶可使用相同的載波 (Carrier)，故可節省佔用的頻寬。
- **缺點**：在分頻 (FDM) 與分碼 (CDM) 多工系統中，不同的用戶可同時傳送信號，在 TDM 系統中則不被允許。

如圖 5-17 所示，在 TDM 系統發送端之取樣器依排定之順序將多個信號取樣，這些來自於不同信號之取樣值結合單一通道中傳送。

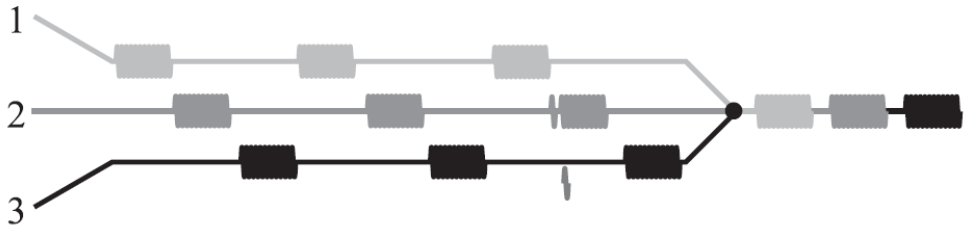


圖 5-17 — TDM 系統之示意圖，多個用戶使用相同的載波，但發射時在時間上做分割

例題 5-24 EXAMPLE

三個獨立的信號 $m_1(t)$、$m_2(t)$ 及 $m_3(t)$ 已知其頻寬分別為 W、W 及 $2W$。設計一 TDM 系統傳輸此三種信號。

解

	$m_1(t)$	$m_2(t)$	$m_3(t)$
頻寬	W	W	$2W$
最小取樣頻率	$2W$	$2W$	$4W$

假設 Commutator 轉動頻率 (轉速) 為 W (轉/sec)，TDM 系統架構圖如圖 5-18。

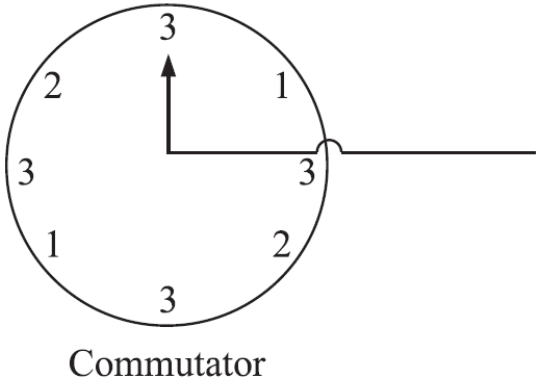


圖 5-18

例題 5-25 EXAMPLE

已知信號 $m(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin \pi t+\frac{1}{3}\sin(3\pi t)+\frac{1}{5}\sin(5\pi t)+\cdots\right)$ 之取樣頻率為 4 Hz。設計抗膺頻濾波器。

解 由取樣定理可知，若取樣頻率為 4 Hz 則 $m(t)$ 之最高頻率不得大於 2 Hz，因此選擇 LPF 之截止頻率介於 1.5～2 Hz。

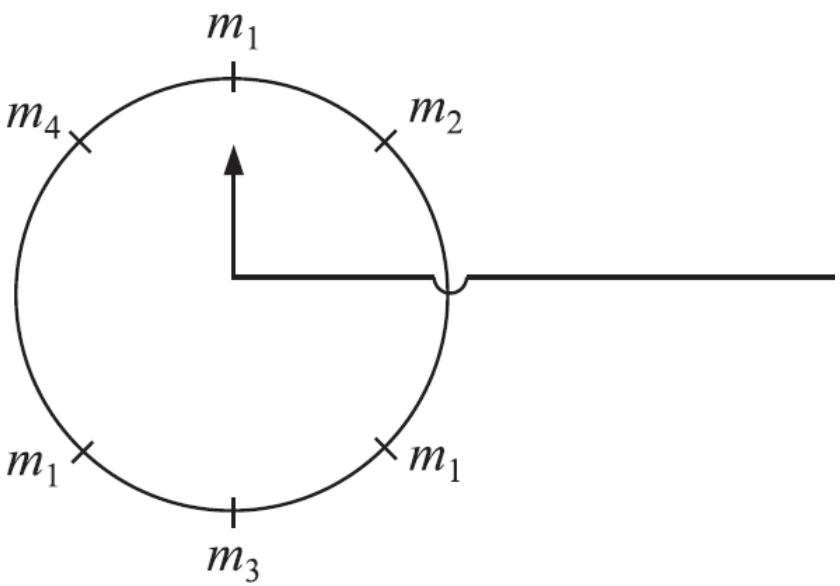


圖 5-19

例題 5-28 EXAMPLE

87 台科大電子

Three messages $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ are to be transmitted on a time-division multiplexed basis. $m_1(t)$, $m_2(t)$ are bandlimited to 5 KHz, and $m_3(t)$ is bandlimited to 10 KHz.

(1) Design a PAM commutator switching system such that each message is periodically sampled at its own Nyquist sampling rate.

(2) A PCM system is used to digitalize the TDM signal obtained in (1). Each sample is quantized into 256 levels. What is the maximum bit duration that may be used.

解 (1) $f_{s1} = f_{s2} = 10\text{ K},\quad f_{s3} = 2 \times 10\text{ K} = 20\text{ K}$

故 $f_s = 2 \times 10 + 20 = 40$ K samples/sec。

令 Commutator 每轉取樣 m_3 2 次，m_1, m_2 各 1 次，如圖 5-20 所示，因此必須 $\dfrac{40\text{ K}}{4} = 10$ K 轉/sec。

(2) $L = 256 = 2^8 \Rightarrow l = 8$，故

$$R_b = 8f_s = 320\text{ Kbps}$$

$$T_b = \frac{1}{R_b} = \frac{1}{320} \times 10^{-3}\text{ sec}$$

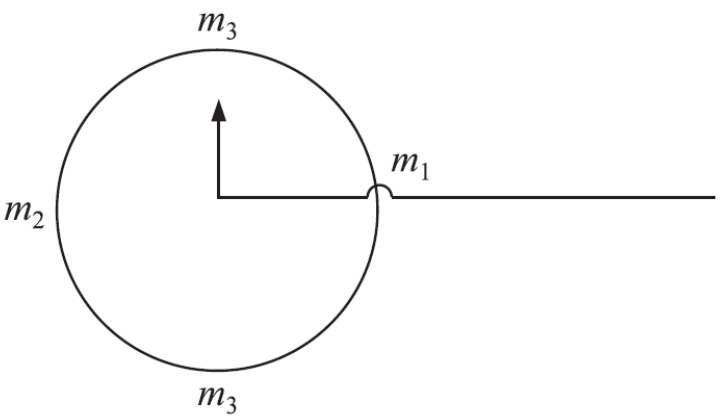


圖 5-20

5-6 差分脈波編碼調變與差異調變

一、差異調變 (DM)

DM 利用相鄰取樣值之差進行編碼，由於當過度取樣時相鄰兩個取樣值之差距應該很小，故將其差值量化後賦予其兩個值，若差值爲正，指定其值爲 $+\delta$，反之，若差值爲負，則量化之值爲 $-\delta$。二階量化器之輸入/輸出如圖 5-21 所示。

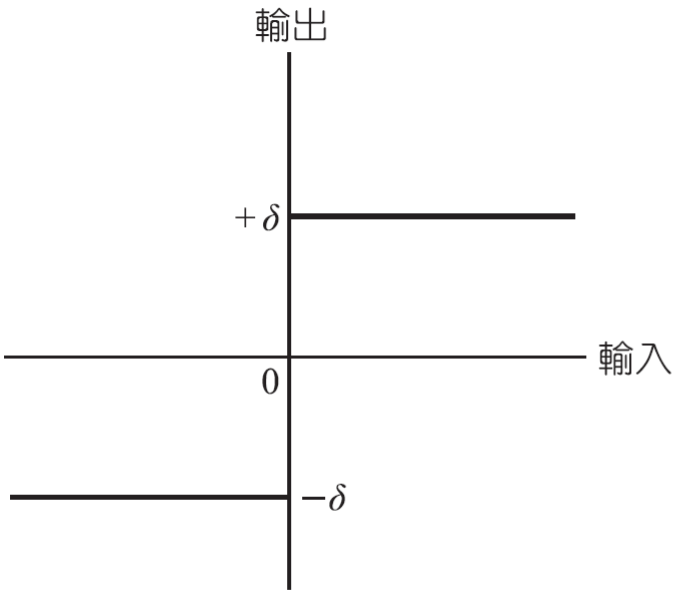


圖 5-21 二階量化器之輸入/輸出關係圖

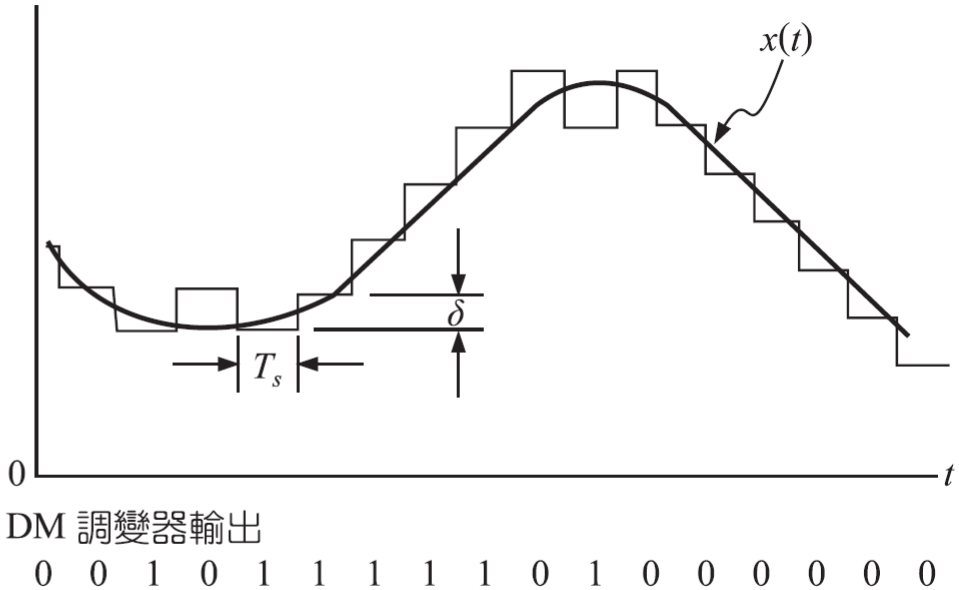


圖 5-22 DM 調變系統之例子

如圖 5-22 所示，輸入信號 $x(t)$ 每隔 T_s 秒取樣一次與近似值 (估計值) 比較，若誤差爲正 (取樣值較大) 則二階量化器之輸出爲 $+\delta$，下一次之近似值 (估計值) 修正 $+\delta$，同時編碼器之輸出爲 “1”。反之，若誤差爲負 (取樣值較小) 則二階量化器之輸出爲 $-\delta$，下一次之近似值 (估計值) 修正 $-\delta$，同時編碼器之輸出爲 “0”。

DM 調變系統的方塊圖如圖 5-23。

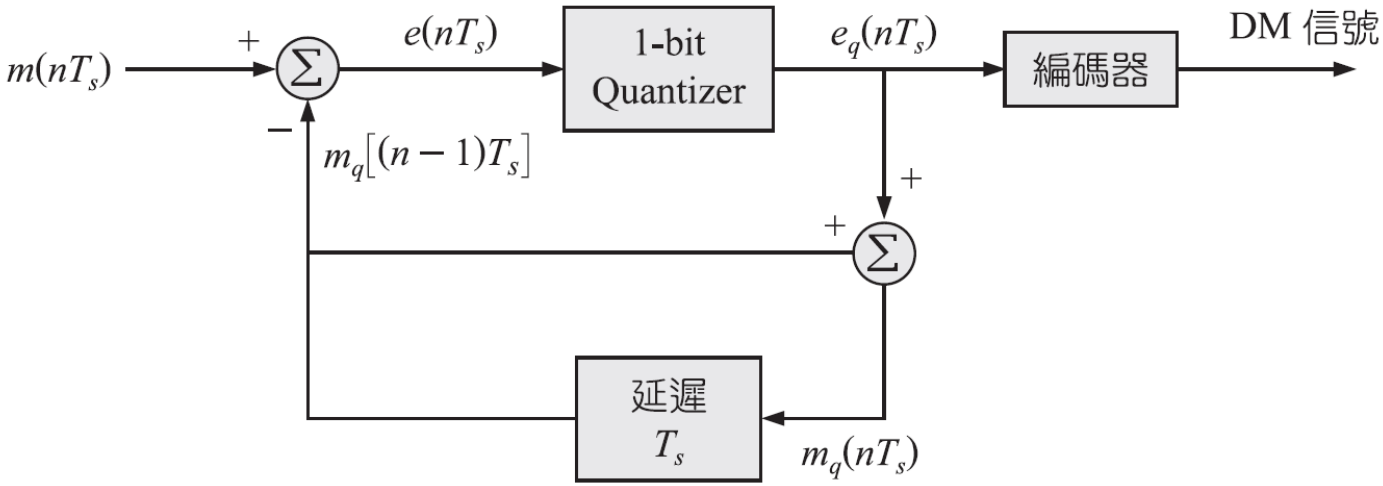


圖 5-23

其中 $m(nT_s)$ 爲被取樣信號，T_s 表示取樣週期，$m_q(nT_s)$ 可視爲追蹤信號，誤差信號則爲

$$e(nT_s) = m(nT_s) - \hat{m}[nT_s] = m(nT_s) - m_q[(n-1)T_s] \tag{5-37}$$

每個取樣值對應到一個位元 (1-bit Quantizer)，每隔 T_s 的時間比較一次，若 $e(nT_s) > 0$ 則輸出爲 1，反之，若 $e(nT_s) < 0$ 則輸出爲 0。這相當於一個 2-level 量化器：當 $e(nT_s) > 0$ 則上升一個階級，δ，後持續追蹤，反之，若則下降一個階級，δ，後持續追蹤。

$$e_q(nT_s) = \delta\,\mathrm{sgn}[e(nT_s)] = \begin{cases} \delta, & 若\ e(nT_s) > 0 \\ -\delta, & 若\ e(nT_s) < 0 \end{cases} \tag{5-38}$$

$$m_q(nT_s) = m_q[(n-1)T_s] + e_q(nT_s) \tag{5-39}$$

在接收端首先將收到的二位元信號轉換成 $e_q(nT_s)$, $1 \to \delta$, $0 \to -\delta$，藉由疊加器 (Accumulator) 還原輸入信號：

$$e_q(nT_s) + m_q[(n-1)T_s] = m_q(nT_s) \tag{5-40}$$

顯然的，(5-40)式爲 (5-39)式之反向運算。DM 系統之接收機如圖 5-24 所示。

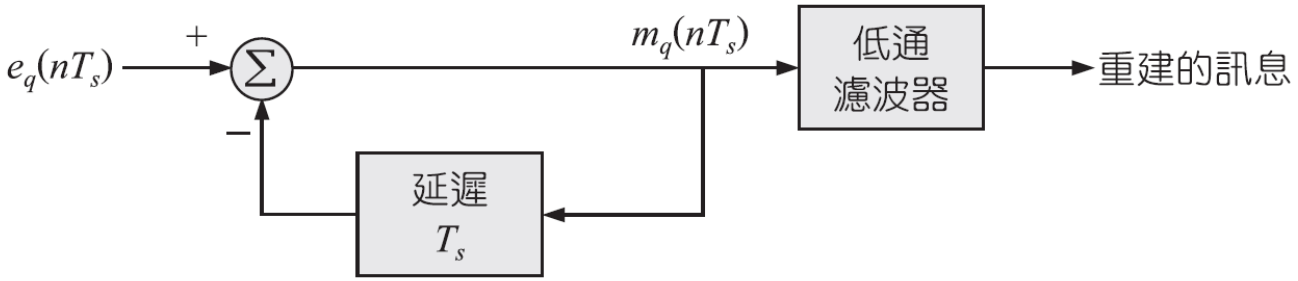


圖 5-24

值得特別注意的是，在 DM 系統中當某個位元解調時發生錯誤，將造成錯誤累積，換言之，整個重建之波形將往上 (0 被誤判爲 1) 移兩個 δ，或往下 (1 被誤判爲 0) 移兩個 δ。

量化誤差 Q 可視爲介於 $[-\delta, \delta]$ 之均勻 (Uniform) 分布，$Q \sim U(-\delta, \delta)$，其期望值及變異數爲

$$\mu_Q = 0$$
$$\sigma_Q^2 = \int_{-\delta}^{\delta} q^2 \frac{1}{2\delta} dq = \frac{\delta^2}{3} \tag{5-41}$$

Remark

δ 之選擇：

1. **斜率過載失眞 (Slope Overload Distortion)**：假若追蹤信號 $m_q(nT_s)$ 無法快速的跟上取樣信號 $m(nT_s)$，亦即 $m(t)$ 之斜率過大，就會發生嚴重失眞，這種現象稱爲斜率超載失眞。此時 δ 必須加大才能避免斜率過載失眞。δ 選取之原則爲

$$\frac{\delta}{T_s} \geq \max\left|\frac{dm(t)}{dt}\right| \tag{5-42}$$

   其中 $\frac{\delta}{T_s}$ 代表 $m_q(nT_s)$ 之追蹤速率。

2. **顆粒雜訊 (Granular Noise)**：與斜率過載失眞相反，若斜率過小則會產生另一種形式的失眞。此時，則必須降低 δ 以降低顆粒雜訊。
3. 改良型的 DM 系統爲在編碼之過程中不斷的調整 δ，換言之，當訊號變化劇烈時 (斜率

大) 增加 δ ，訊號變化緩慢時則降低 δ，稱之爲**適應性差異調變** (Adaptive Delta Modulation, ADM)。

二、差分脈波編碼調變 (DPCM)

DPCM 傳送端架構圖如圖 5-25。

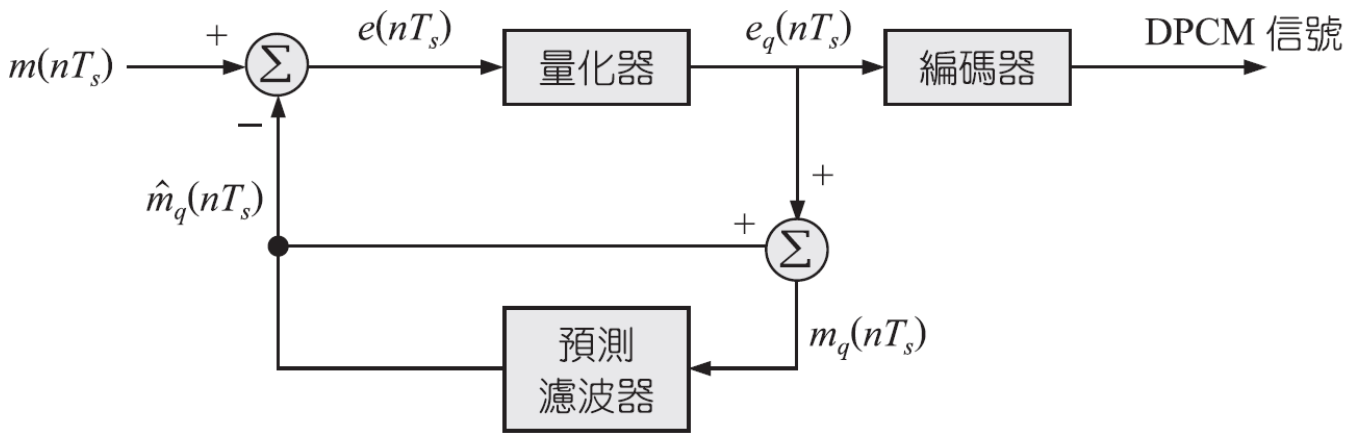


圖 5-25

$e(nT_s) = m(nT_s) - \hat{m}(nT_s)$：估計誤差。定義：$q(nT_s)$ 爲量化誤差，則

$$e_q(nT_s) = e(nT_s) + q(nT_s) \text{ 量化器輸出}$$

$$m_q(nT_s) = \hat{m}(nT_s) + e_q(nT_s) \tag{5-43}$$

DPCM 接收器之架構圖如圖 5-26。

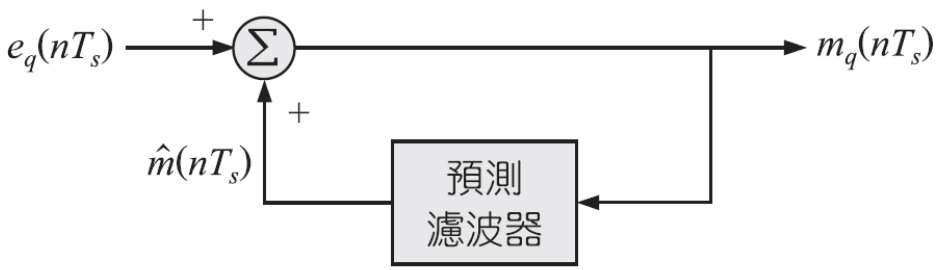


圖 5-26

Remark

顯然的，差異調變爲 DPCM 之特例 (使用 1-bit 編碼器)。

三、線性最小均方誤差 (Minimum Mean Squared Error, MMSE) 預估器

令 $x(n) = x(nT_s)$，則一個 p 階線性預估器可表示如下：

$$\hat{x}(n) = w_1 x(n-1) + w_2 x(n-2) + \cdots + w_p x(n-p) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} \tag{5-44}$$

其中 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_p \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x} = [x(n-1) \quad x(n-2) \quad \cdots \quad x(n-p)]^T$。線性 MMSE 預估器之設計

目的在找到 $\mathbf{w}$ 使得目標函數 $J = E[(x(n) - \hat{x}(n))^2]$ 爲最小。

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{w}) &= E[(x(n) - \mathbf{w}^T\mathbf{x})^2] = E[x^2(n) - 2x(n)\mathbf{w}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{w}] \\
&= R_X(0) - 2\mathbf{w}^T\mathbf{r} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{5-45}
$$

其中

$$
\mathbf{r} = E[x(n)\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} R_X(1) & R_X(2) & \cdots & R_X(p) \end{bmatrix}^T,
$$

$$
\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & \cdots & R_X(p) \\ R_X(1) & R_X(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_X(1) \\ R_X(p) & \cdots & R_X(1) & R_X(0) \end{bmatrix}
\tag{5-46}
$$

將目標函數 $J = E[(x(n) - \hat{x}(n))^2]$ 對 $\mathbf{w}$ 微分，再將結果設爲 0，可得到最佳解如下：

$$\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = -2\mathbf{r} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} = 0 \Rightarrow \mathbf{w}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \tag{5-47}$$

$$\begin{aligned} J_{\min} &= J(\mathbf{w}_{\text{MMSE}}) = R_X(0) - 2\mathbf{w}_{\text{MMSE}}^T\mathbf{r} + \mathbf{w}_{\text{MMSE}}^T\mathbf{R}\mathbf{w}_{\text{MMSE}} \\ &= R_X(0) - \mathbf{r}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \end{aligned} \tag{5-48}$$

1. **一階預估器 [One-tap (order one) Predictor]**：由(5-47)式，可得一階預估器之係數如下：

$$w = \frac{R_X(1)}{R_X(0)} \tag{5-49}$$

由(5-48)式，可得預估誤差之變異數如下：

$$\sigma_E^2 = J_{\min} = R_X(0) - wR_X(1) = R_X(0) - \frac{R_X^2(1)}{R_X(0)} = R_X(0)(1 - w^2) \tag{5-50}$$

2. **預估增益 (Prediction Gain)**：

$$G = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_E^2} = \frac{E\{m^2(t)\}}{R_X(0)(1 - w^2)} = \frac{R_X(0)}{R_X(0)(1 - w^2)} = \frac{1}{(1 - w^2)} \tag{5-51}$$

例題 5-29 EXAMPLE

A delta modulator has the message signal:

$$m(t) = 6\sin 20\pi t + 4\sin 40\pi t$$

Determine the minimum sampling frequency required to prevent slope overload, when impulse weights δ_0 are 0.1π.

解 $\dfrac{dm}{dt} = 120\pi\cos(20\pi t) + 160\pi\cos(40\pi t)$

$$\left|\frac{dm}{dt}\right|_{\max} = 280\pi \le \frac{\delta}{T_s} = \delta f_s \Rightarrow f_s \ge \frac{280\pi}{0.1\pi} = 2.8\ \text{KHz}$$

例題 5-30 EXAMPLE

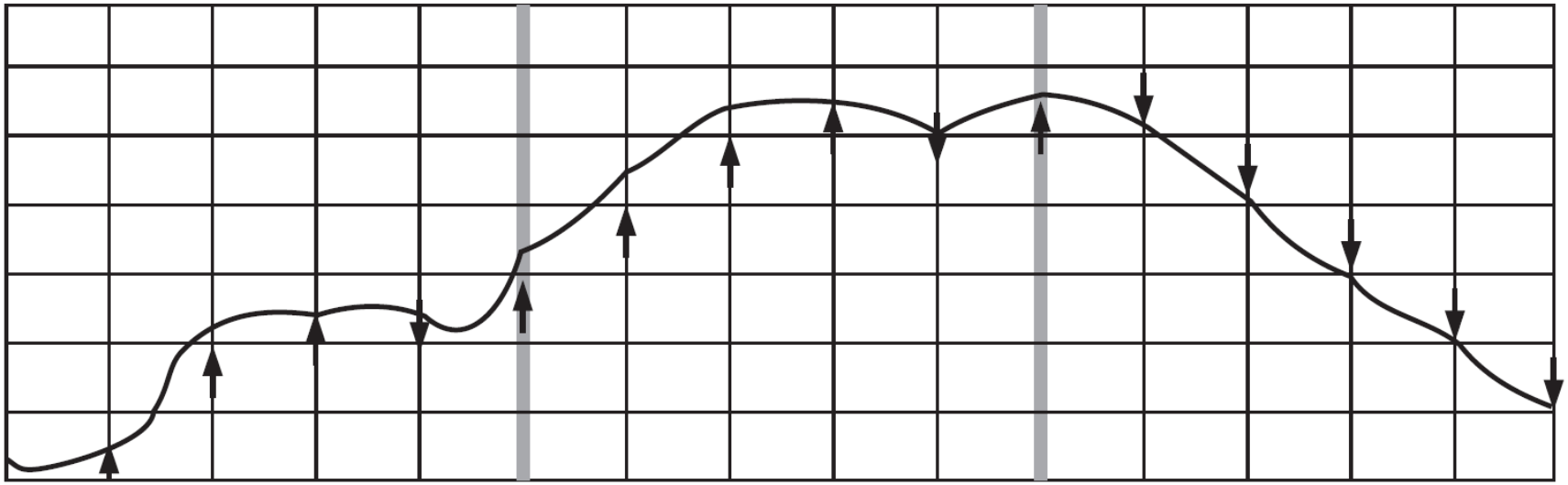
88 中央電機

(1) A continuous data signal is quantized and transmitted using a PCM system. If each data sample at the receiving end of the system must be known to within ± 0.5% of the peak-to-peak full-scale value:

(i) How many binary symbols must each transmitted digital word contain ?

(ii) Assume that the message signal is speech and has a bandwidth of 4 KHz. Estimate minimum required bandwidth of the resulting PCM signal.

(2) The analog waveform shown in Fig. 5-27 is to be delta modulated. The sampling period and the step size are indicated by the grid on the figure. The fist DM output and the staircase function for this period are also shown. Show the rest of the staircase function and give the DM output. Indicate regions where slope overload distortion exists.



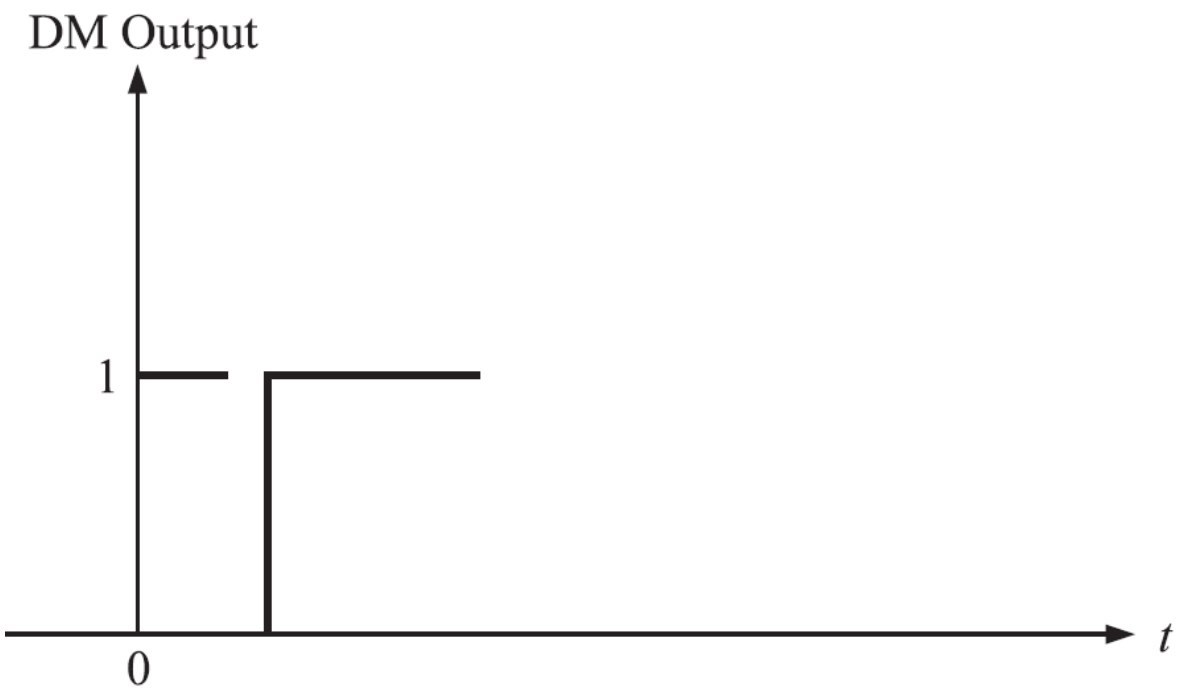


圖 5-27

解

(1) (i) $\frac{1}{2L} \le 0.5\% \Rightarrow L \ge 100 \Rightarrow l = 7$

(ii) $f_s = 2f_m = 8$ K samples/sec，故

$$R_s = 7 \text{ bits/sample} \times 8 \text{ K samples/sec} = 56 \text{ Kbps}$$

$$BW = \frac{R_b}{2} = 28 \text{ KHz}$$

(2)

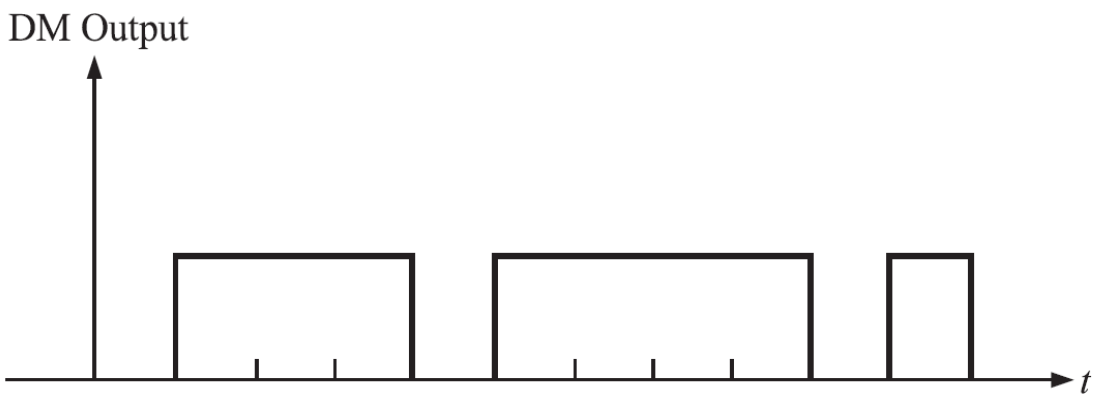


圖 5-28