

Ch6 基頻數位通信系統



6-1 匹配濾波器

考慮如圖 6-1 之線性接收器：

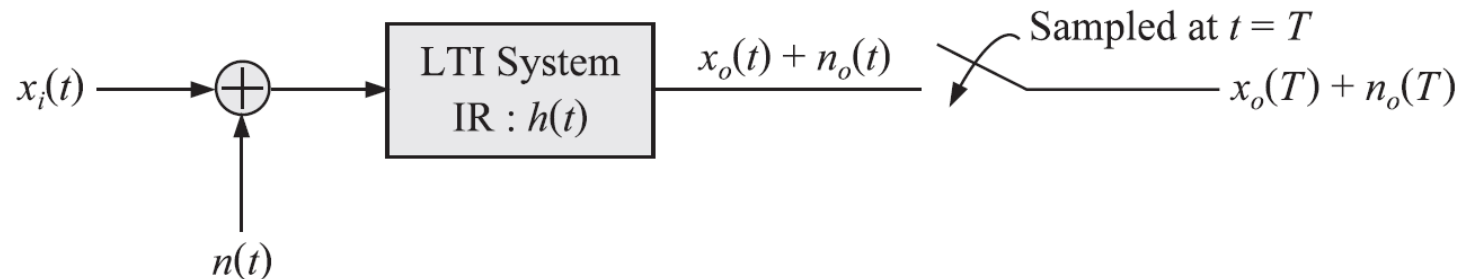


圖 6-1

其中雜訊 $n(t)$ 為可加性白高斯雜訊 (AWGN)，其性質如下：

1. $n(t_i) \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right), \forall i$ 。
2. $\forall i \neq j, n(t_i)、n(t_j)$ 為不相關 (因均為高斯分布，故獨立)，亦即

$$E[n(t_i)n(t_j)] = 0, \forall i \neq j$$

3. $R_n(\tau) = E\{n(t)n(t + \tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
 $S_n(f) = F\{R_n(\tau)\} = \frac{N_0}{2}, \forall f$ (white)

設計之條件：求出 $h(t)$ 使得輸出端在 $t = T$ 時 [T 為 $x_i(t)$ 之信號區間]，訊號與雜訊功率比 (Signal to Noise Power Ratio, SNR) 最大。如圖 6-1 所示，輸出訊號 $x_o(t)$ 可表示為

$$x_o(t) = F^{-1}\{X_o(f)\} = F^{-1}\{X_i(f)H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_i(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6-1)$$

在 $t = T$ 時取樣，可得

$$x_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} X_i(f)H(f)e^{j2\pi fT} df \quad (6-2)$$

輸出雜訊之 PSD 爲

$$S_{n_o}(f) = S_n(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad (6-3)$$

故輸出雜訊之平均功率爲

$$\begin{aligned} E\{n_o^2(T)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(f)|^2 df \quad (\text{Parseval 定理}) \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \end{aligned} \quad (6-4)$$

根據以上之結果可將輸出端之 SNR 表示為

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \Big|_{t=T} \equiv \frac{|x_o(T)|^2}{E[n_0^2(T)]} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} X_i(f)H(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (6-5)$$

利用 Schwartz 不等式：

$$1. |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 \leq |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \quad (\text{當 } \vec{A} = k\vec{B} \text{ 時等號成立}) \quad (6-6)$$

$$2. \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \quad (\text{當 } f(x) = kg^*(x) \text{ 時等號成立}) \quad (6-7)$$

可得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \Big|_{t=T} \leq \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} |X_i(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |X_i(f)|^2 df = \frac{2}{N_0} E_i \quad (6-8)$$

其中等號在 $H(f) = X_i^*(f)e^{-j2\pi fT}$ 時成立 ($\left(\frac{S}{N}\right)_o \Big|_{t=T}$ 達到最大值)，故可得**匹配濾波器** (Matched Filter, MF) 之頻率響應為

$$H_{\text{MF}}(f) = X_i^*(f)e^{-j2\pi fT} \quad (6-9)$$

將上式取逆傅立葉變換後可得匹配濾波器之脈衝響應：

$$\begin{aligned} h_{\text{MF}}(t) &= F^{-1}\{H_{\text{MF}}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_i^*(f)e^{-j2\pi f(T-t)} df = \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_i(f)e^{j2\pi f(T-t)} df \right]^* \\ &= x_i^*(T-t) \\ &= x_i(T-t) \quad [x_i(t) \text{ 為實變數函數}] \end{aligned} \quad (6-10)$$

Remark

1. MF 之脈衝響應為發射波形折疊 (映射) 後再向右位移 “ T ”，如圖 6-2。

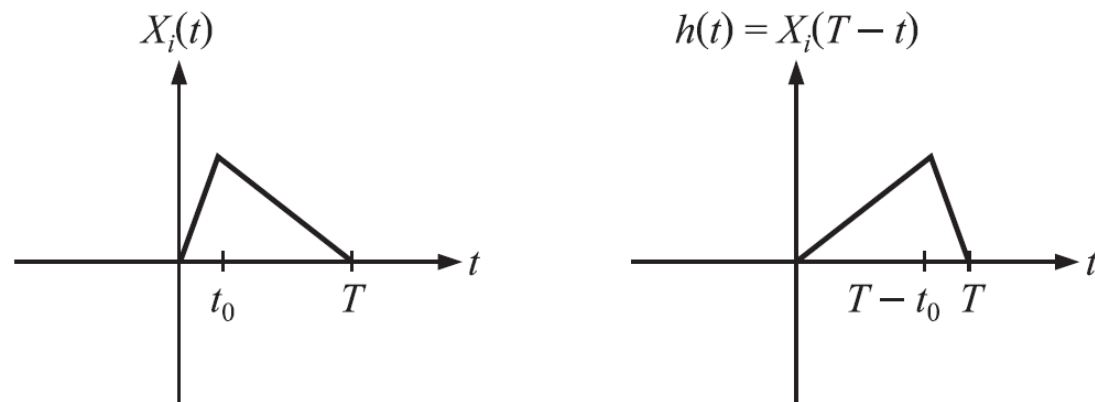


圖 6-2

2. $|X_o(f)| = |X_i(f)|^2 = G_{X_i}(f) \quad (\text{ESD}) \quad (6-11)$

證明

$$X_o(f) = H_{\text{MF}}(f)X_i(f) = |X_i(f)|^2 e^{-j2\pi fT}$$

故

$$|X_o(f)| = |X_i(f)|^2 \quad \triangleleft \dots$$

3. $x_o(t) = R_{x_i}(T - t) \quad (6-12)$

證明

$$\begin{aligned} x_o(t) &= h_{\text{MF}}(t) * x_i(t) = \int h_{\text{MF}}(\tau)x_i(t - \tau) d\tau \\ &= \int x_i(T - \tau)x_i(t - \tau) d\tau = R_{x_i}(T - t) \end{aligned}$$

故當 $t = T$ 時，

$$x_o(T) = R_{x_i}(0) = E_i \quad (6-13)$$



-
4. MF 輸出在 $t = T$ 時達到最大， $\left(\frac{S}{N}\right)_o \Big|_{t=T} = \frac{2}{N_0} E_i$ ，換言之，輸出端最大之 SNR 只與輸入訊號能量及雜訊 PSD 有關，與所使用之波形無關。

定理 6-1 MF = correlator (相關器)

$$\begin{aligned} y(t) &= h_{\text{MF}}(t) * [x_i(t) + n(t)] = \int_0^t [x_i(\tau) + n(\tau)] h_{\text{MF}}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t [x_i(\tau) + n(\tau)] x_i(T - t + \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6-14)$$

其中 $y(t)$ 為 MF 之輸出。當 $t = T$ 時，

$$y(T) = \int_0^T [x_i(\tau) + n(\tau)] x_i(\tau) d\tau \quad (6-15)$$

由(6-15)式可得匹配濾波器等效於將接收到的信號與 $x_i(t)$ 進行自相關運算，並在時間 T 時將訊號取出，如圖 6-3 所示。

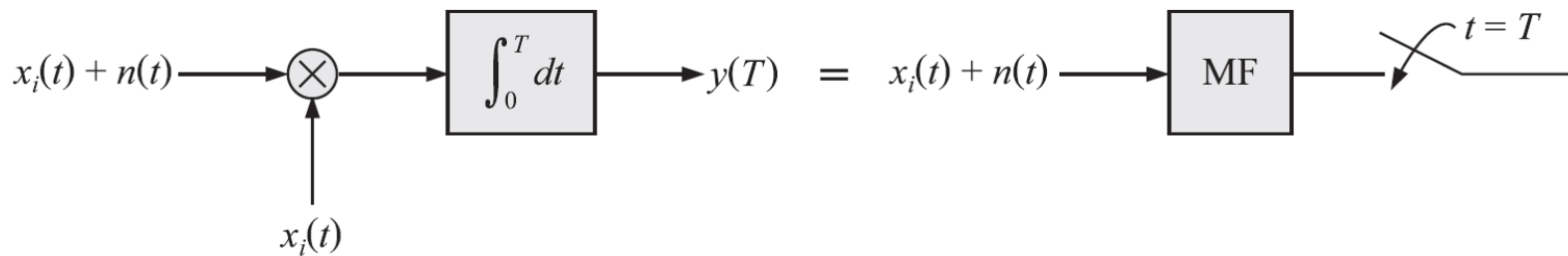


圖 6-3



例題 6-1
EXAMPLE

若 $x_i(t) = A, 0 \leq t \leq T$ ，設計 MF 與相關器並繪出其輸出波形。

解 (1) MF :

$$h(t) = x_i(T - t) = x_i(t)$$

$$x_o(t) = x_i(t) * h(t) = \int x_i(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

- Case 1.

$$t \leq 0$$
$$x_o(t) = 0$$

- Case 2.

$$0 \leq t \leq T$$
$$x_o(t) = \int_0^t A^2 d\tau = A^2 t$$

- Case 3.

$$T \leq t \leq 2T$$

$$x_o(t) = \int_{-T}^T A^2 dt = A^2(2T - t)$$

- Case 4.

$$t \geq 2T$$

$$x_o(t) = 0$$

由以上之討論可得 $x_o(t)$ 之圖形如圖 6-4。

$$x_o(T) = A^2T = \int_0^T x_i^2(t) dt = E_{x_i}$$

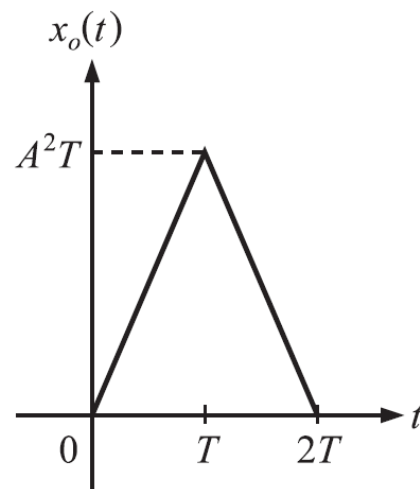


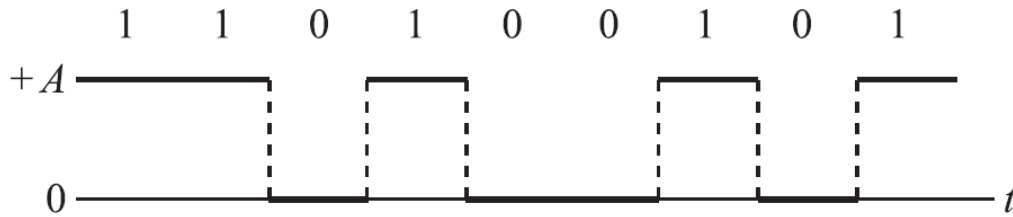
圖 6-4

顯然的，MF 在 $t = T$ 時取樣可使 SNR 最大。

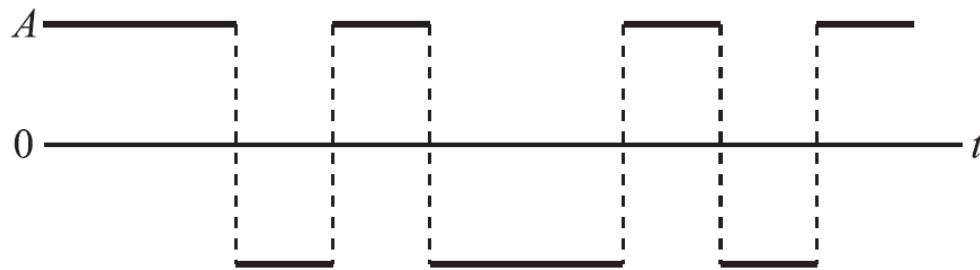
(2) 相關器：

$$\int_0^T x_i^2(t) dt = A^2T$$

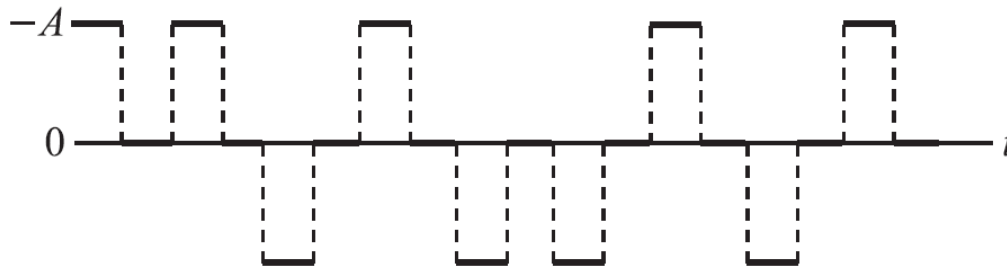
6-2 基頻訊號的傳輸方式



(a) 單極性不歸零信號
[Uni-polar Non-return to Zero (NRZ)]



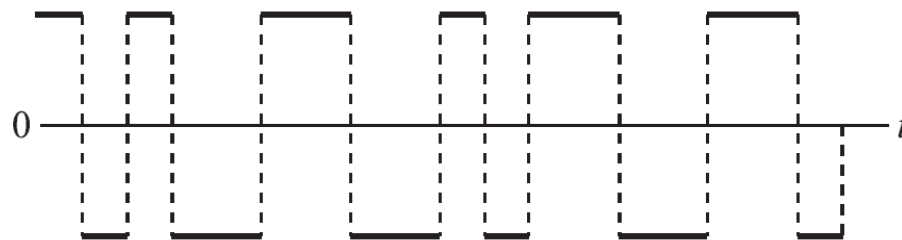
(b) 雙極性不歸零信號
(Bi-polar NRZ)



(c) 雙極性歸零信號
[Bi-polar Return to Zero (RZ)]



(d) 單極性歸零信號
(Uni-polar RZ)



(e) 雙相不歸零信號
(Bi-phase NRZ, Manchester)

圖 6-5

以上之各種信號波形可視為 PCM 輸出之一連串脈衝函數經過波形產生器所得 (如圖 6-6)。

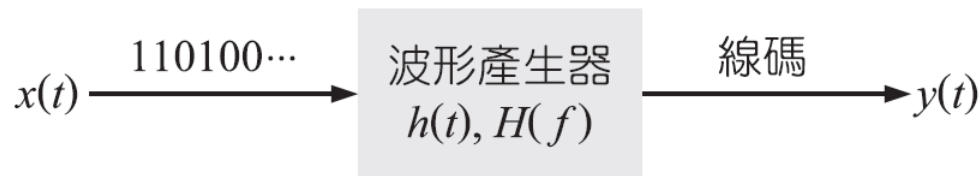


圖 6-6

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b - t_d) \quad (6-16)$$

其中 $\{a_k\}$ 為二位元隨機序列，其值為“0”或“1”， T_b 為位元區間。假設下列條件成立：

- $R_{am} = E[a_k a_{k+m}]$ 。
- t_d 為介於 0 至 T_b 之值，且機率均等。換言之， t_d 為均勻分布之隨機變數 T_d 之取樣值 $T_d \sim U(0, T_b)$ 。
- t_d 與 $\{a_k\}$ 相互獨立。

根據第 4 章之討論，隨機二位元信號之自相關函數可表示為

$$R_X(\tau) = E\{x(t + \tau)x(t)\} = \frac{1}{T_b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{am} \delta(\tau - mT_b) \quad (6-17)$$

其中 $R_{am} = E\{a_{m+k}a_k\}$ 。

$$S_X(f) = F\{R_X(\tau)\} = \frac{1}{T_b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{am} \exp(-j2\pi f m T_b) \quad (6-18)$$

故波形產生器輸出 $y(t)$ 之 PSD 函數為

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2 \quad (6-19)$$

1. 單極性不歸零信號 ($a_k = A$ 或 0 機率均等) :

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T_b}{T_b}\right) \Rightarrow H(f) = T_b \operatorname{sinc}(fT_b) \exp(-j\pi fT_b) \quad (6-20)$$

$$R_{am} = \begin{cases} \frac{1}{2}A^2, & m = 0 \\ \frac{1}{4}A^2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (6-21)$$

故

$$S_X(f) = \frac{1}{2} \frac{A^2}{T_b} + \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b} \sum_{m \neq 0} \exp(-j2\pi fmT_b) \quad (6-22)$$

其中， $f_b = \frac{1}{T_b}$ ，利用 Poisson Sum Formula：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f m T_b) = \frac{1}{T_b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m f_b) \quad (6-23)$$

可得

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \exp(-j2\pi f m T_b) = \frac{1}{T_b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m f_b) - 1 \quad (6-24)$$

代入 (6-19) 式可得

$$S_X(f) = \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b} + \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m f_b) \quad (6-25)$$

故單極性 NRZ 之 PSD 為

$$S_Y(f) = \frac{1}{4} A^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b) + \frac{1}{4} A^2 \delta(f) \quad (6-26)$$

2. 雙極性不歸零信號 ($a_k = A$ 或 $-A$ 機率均等) :

$$R_{am} = \begin{cases} A^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (6-27)$$

故

$$S_X(f) = \frac{A^2}{T_b}, \quad S_Y(f) = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2(fT_b) \quad (6-28)$$

3. 雙相不歸零信號 ($a_k = A$ 或 $-A$ 機率均等) :

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{4}T_b}{\frac{1}{2}T_b}\right) - \Pi\left(\frac{t - \frac{3}{4}T_b}{\frac{1}{2}T_b}\right) \quad (6-29)$$

$a_k = A$ 或 $-A$ 機率均等，故

$$H(f) = jT_b \sin\left(\frac{\pi}{2}fT_b\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}fT_b\right) \exp(-j\pi fT_b) \quad (6-30)$$

$$R_{am} = \begin{cases} A^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (6-31)$$

$$S_X(f) = \frac{A^2}{T_b} \quad (6-32)$$

$$S_Y(f) = A^2 T_b \sin^2\left(\frac{\pi}{2}fT_b\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}fT_b\right) \quad (6-33)$$

4. 單極性歸零信號 ($a_k = A$ 或 0 機率均等) :

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{4}T_b}{\frac{1}{2}T_b}\right) \Rightarrow H(f) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}\left(\frac{fT_b}{2}\right) \exp\left(-j\frac{\pi fT_b}{2}\right) \quad (6-34)$$

$$R_{am} = \begin{cases} \frac{1}{2}A^2, & m = 0 \\ \frac{1}{4}A^2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (6-35)$$

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \frac{1}{2} \frac{A^2}{T_b} + \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b} \sum_{m \neq 0} \exp(-j2\pi f m T_b) \\ &= \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b} + \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_b) \end{aligned} \quad (6-36)$$

單極性 RZ 之 PSD 為

$$S_Y(f) = \frac{A^2 T_b}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{fT_b}{2}\right) \left[1 + f_b \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_b) \right] \quad (6-37)$$

5. AMI 信號 (單極性歸零信號但資料為 1 時 $\pm A$ 交互出現) :

$$P(a_k = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(a_k = A) = P(a_k = -A) = \frac{1}{4}$$

$$R_{a,0} = \frac{1}{2}A^2, \quad R_{a,1} = R_{a,-1} = E[a_{k\pm 1} a_k] = \frac{1}{4}(0 + 0 + 0 - A^2) = -\frac{1}{4}A^2$$

$$m \geq \pm 2 \Rightarrow R_{am} = \frac{1}{4}(0 + 0 + 0) + \frac{1}{16}(A^2 + A^2 - A^2 - A^2) = 0 \quad (6-38)$$

故

$$R_{am} = \begin{cases} \frac{1}{2}A^2, & m = 0 \\ -\frac{1}{4}A^2, & m = \pm 1 \\ 0, & |m| \geq 2 \end{cases}$$

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{4}T_b}{\frac{1}{2}T_b}\right) \Rightarrow H(f) = \frac{T_b}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{fT_b}{2}\right) \exp\left(-j\frac{\pi fT_b}{2}\right) \quad (6-39)$$

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \frac{1}{2} \frac{A^2}{T_b} - \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b} \exp(-j2\pi fT_b) - \frac{1}{4} \frac{A^2}{T_b} \exp(j2\pi fT_b) \\ &= \frac{1}{2} \frac{A^2}{T_b} (1 - \cos(2\pi fT_b)) \end{aligned} \quad (6-40)$$

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \frac{A^2 T_b}{8} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT_b}{2}\right) [1 - \cos(2\pi fT_b)] \\ &= \frac{A^2 T_b}{8} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT_b}{2}\right) \sin^2(\pi fT_b) \end{aligned} \quad (6-41)$$

6. 雙極性歸零信號：

$$R_{am} = \begin{cases} A^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (6-42)$$

故

$$S_X(f) = \frac{A^2}{T_b} \quad (6-43)$$

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{4}T_b}{\frac{1}{2}T_b}\right) \Rightarrow H(f) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}\left(f\frac{T_b}{2}\right) \exp\left(-j\frac{\pi f T_b}{2}\right) \quad (6-44)$$

故

$$S_Y(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right) \quad (6-45)$$

Remark

1. 顯然的，雙相不歸零信號以及雙極性不歸零信號無直流分量。
2. 雙相不歸零信號所佔的頻寬是其他線碼的 2 倍。

6-4 符號間的干擾

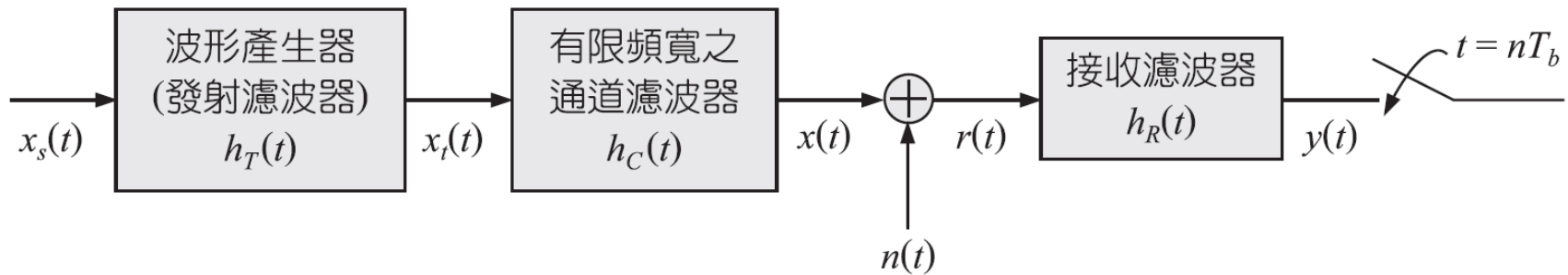


圖 6-17

利用圖 6-17 對整個信號流程說明如下。

二位元信號 ($a_k = A$ 或 $-A$) 被傳送，每個位元之時間為 T_b (Bit Rate = R_b)。

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b) \quad (6-55)$$

經過發射濾波器 $h_T(t)$ 後，傳送信號為

$$x_t(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b) * h_T(t) = \sum_k a_k h_T(t - kT_b) \quad (6-56)$$

若通道響應為 $h_C(t)$ ，接收濾波器之響應為 $h_R(t)$ ，則接收信號與接收濾波器之輸出分別為

$$r(t) = x(t) + n(t) = x_t(t) * h_C(t) + n(t) \quad (6-57)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t) * h_R(t) = x_s(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t) + n(t) * h_R(t) \\ &= x_s(t) * h_{\text{eff}}(t) + v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b) * h_{\text{eff}}(t) + v(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h_{\text{eff}}(t - kT_b) + v(t) \end{aligned} \quad (6-58)$$

其中 $v(t) \equiv n(t) * h_R(t)$, $h_{\text{eff}}(t) \equiv h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)$ 。在接收濾波器之輸出每隔 T_b 時取樣，則在 $t_i = iT_b$ 可得

$$\begin{aligned}
 y(iT_b) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h_{\text{eff}}((i-k)T_b) + v(iT_b) \\
 &= a_i + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 1}}^{\infty} a_k h_{\text{eff}}((i-k)T_b) + v(iT_b)
 \end{aligned} \tag{6-59}$$

其中右式第二、三項分別為 ISI 與雜訊。換言之，若無 ISI 與雜訊， $y(t_i) = a_i$ 。此即要求

$$\begin{cases} h_{\text{eff}}(0) = 1 \\ h_{\text{eff}}((i-k)T_b) = 0, \quad \forall i \neq k \end{cases} \tag{6-60}$$

亦即所有由相鄰位元擴散過來之值，恰在取樣點為零。因此不會造成 ISI。令 $\tilde{h}_{\text{eff}}(t) =$

$h_{\text{eff}}(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_b)$ ，則

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\text{eff}}(f) &= F\{\tilde{h}_{\text{eff}}(t)\} = H_{\text{eff}}(f) * R_b \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kR_b) \\ &= R_b \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\text{eff}}(f - kR_b)\end{aligned}\tag{6-61}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\text{eff}}(f) &= F\left\{h_{\text{eff}}(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_b)\right\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{eff}}(kT_b)\delta(t - kT_b)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{eff}}(kT_b)\delta(t - kT_b)\right\} \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{eff}}(0)\delta(t) \exp(-j2\pi ft) dt = h_{\text{eff}}(0) = 1\end{aligned}\tag{6-62}$$

其中

$$H_{\text{eff}}(f) = F\{h_{\text{eff}}(t)\} = H_T(f)H_C(f)H_R(f) \quad (6-63)$$

比較 (6-61) 式和 (6-62) 式可知：若滿足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{\text{eff}}(f - kR_b) = T_b$ ，換言之，若整個系統的等效轉移函數 $[H_{\text{eff}}(f)]$ 或等效脈衝響應 $[h_{\text{eff}}(t)]$ 如圖 6-18 所示，則不會有 ISI 的問題。

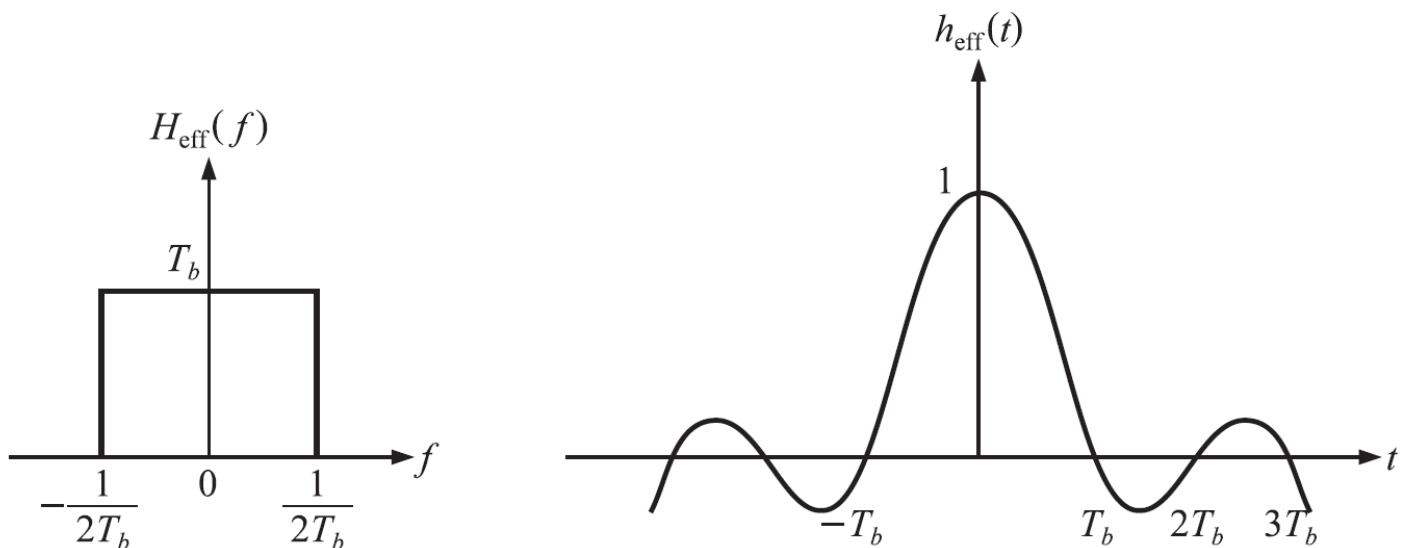


圖 6-18

其中

$$h_{\text{eff}}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_b}\right) \quad (6-64)$$

從時域的觀點來看， $h_{\text{eff}}(t)$ 只有在 $t=0$ 時其值為 1，在 nT_b 點之值均為 0，同理 $h_{\text{eff}}(t - kT_b)$ 只有在 $t = kT_b$ 點為 1，在 nT_b ($n \neq k$) 點之值均為 0，換言之， $h_{\text{eff}}(t)$ 與 $h_{\text{eff}}(t - kT_b)$ 在 $t = nT_b$ 點互不干擾。從頻域的觀點來看：

$$H_{\text{eff}}(f) = T_b \Pi(fT_b) \quad (6-65)$$

亦即為一頻寬為 $\frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2}$ 之低通濾波器 (LPF)。簡言之，將信號之高頻部分濾掉即可避免 ISI。

● 定義 6-1

頻寬效率 (Bandwidth Efficiency)

$$\eta = \frac{\text{傳輸率}}{\text{系統頻寬}}$$

則由此定義可知，如圖 6-18 理想濾波器之頻寬效率為

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{R_b}{\frac{R_b}{2}} = 2 \quad (6-66)$$

亦即為一頻寬為 $\frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2}$ 之低通濾波器 (LPF)。簡言之，將信號之高頻部分濾掉即可避免 ISI。

● 定義 6-1

$$\eta = \frac{\text{傳輸率}}{\text{系統頻寬}}$$

則由此定義可知，如圖 6-18 理想濾波器之頻寬效率為

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{R_b}{\frac{R_b}{2}} = 2 \quad (6-66)$$

然而，理想的濾波器對於取樣時間的誤差非常敏感，換言之，只要取樣時間點產生些微的誤差就會導致信號部分急劇衰減而 ISI 不再是 0。根據以上的討論可得以下定理。

● 定理 6-2 Nyquist Bandwidth Constraint

若信號傳輸速率為 R_s symbols/sec，在沒有 ISI 的條件下，所需要的最小系統頻寬為 $\frac{R_s}{2}$ 。

一、升餘弦濾波器

為改善上述理想 LPF 之缺點，可使用**升餘弦濾波器** (Raised Cosine Filter)，其轉移函數如下：

$$H_{\text{eff}}(f) = \begin{cases} T_b, & |f| \leq f_1 \\ \frac{T_b}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2\Delta f} \right] \right\}, & f_1 \leq |f| \leq W \\ 0, & |f| \geq W \end{cases} \quad (6-67)$$

其振幅頻譜如圖 6-19 所示。其中 $f_0 = \frac{R_b}{2}$ ， $\Delta f = f_0 - f_1 = W - f_0 = \alpha f_0$ 。

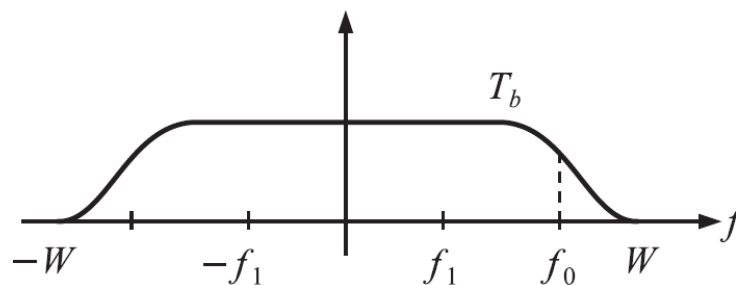


圖 6-19

● 定義 6-2

滾邊因子 (Roll-off Factor)

$$\alpha \equiv \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{W - f_0}{f_0} \quad (6-68)$$

圖 6-20 與圖 6-21 分別表示在不同的滾邊因子下，升餘弦濾波器之轉移函數與脈衝響應。

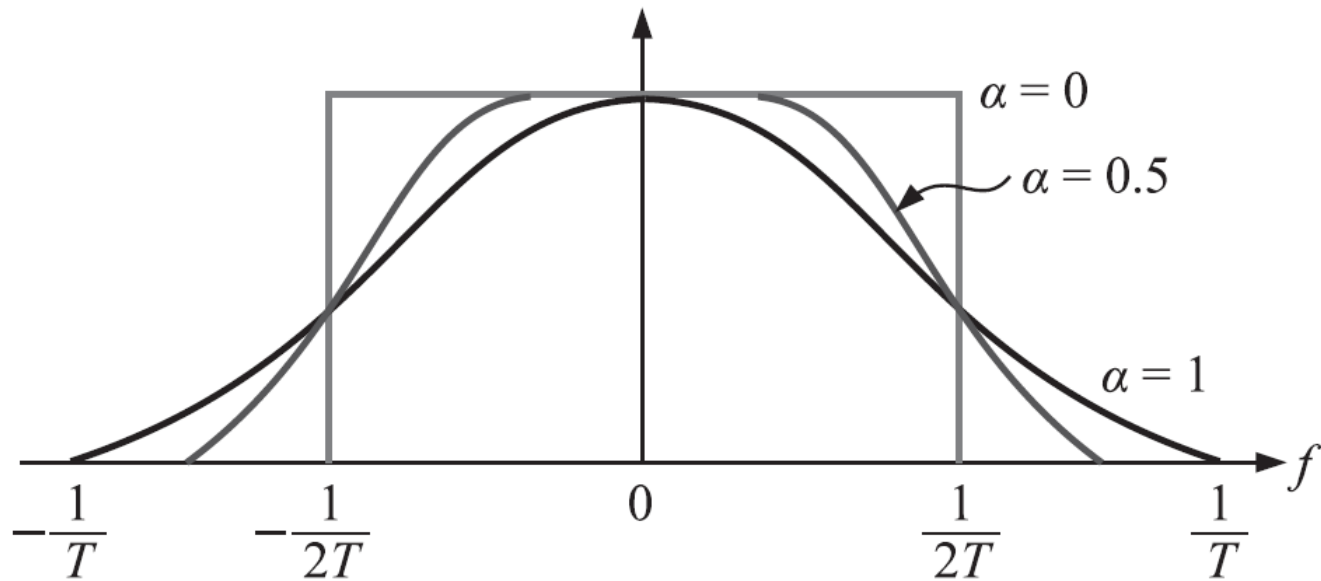


圖 6-20 升餘弦濾波器在不同的滾邊因子下之轉移函數

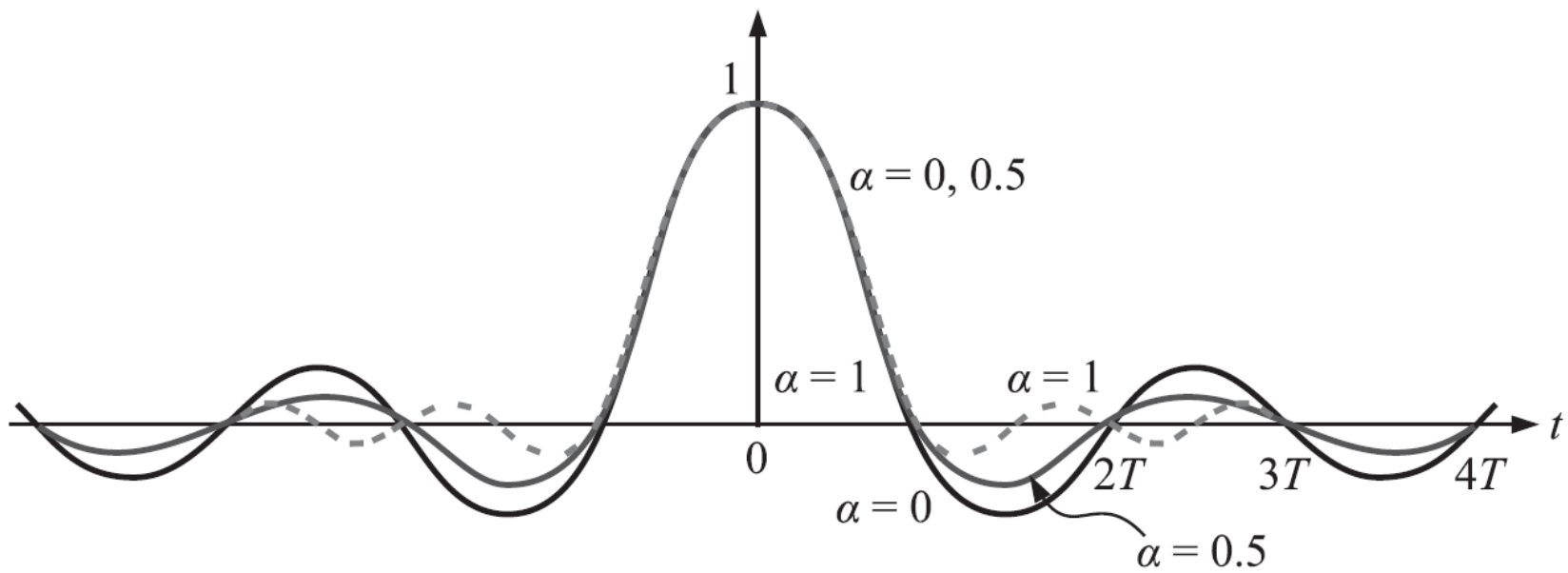


圖 6-21 升餘弦濾波器在不同的滾邊因子下之脈衝響應

顯然的， α 之值決定了升餘弦濾波器的陡度，若 $\alpha = 0$ ，則升餘弦濾波器等同理想 LPF。升餘弦濾波器之頻寬為

$$W = f_0 + \Delta f = (1 + \alpha)f_0 = \frac{1}{2}(1 + \alpha)R_b \quad (6-69)$$

故

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{2}{1 + \alpha} \quad (6-70)$$

Remark

當 α 增加時，系統對於取樣時間之誤差較不敏感，但是佔用了較大的頻寬，換言之， η 值降低，在最極限的情況下， $\alpha = 1$ ，此時 $W = R_b$, $\eta = 1$ 。 ■

- (1) Explain the Nyquist criterion for ISI free transmission.
- (2) How can we achieve a symbol rate $R = 2W$ with ISI-free in a practical application? W is the channel bandwidth.
- (3) Over an ideal channel with $W = 4000$ Hz, what is the maximum information rate that can be supported by 8-FSK modulation, under the constraint of ISI-free?

解

(1) 若信號傳輸速率為 R_b ，則所需最小的系統頻寬為 $\frac{R_b}{2}$ ，才能避免 ISI。

$$(2) H_{\text{eff}}(f) = \frac{1}{2W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right), \quad h_{\text{eff}}(t) = \text{sinc}(2Wt)$$

$$(3) R_s = 2W = 8 \text{ K symbols/sec}$$

$$8 \text{ FSK} \Rightarrow 1 \text{ Symbol} = 3 \text{ Bits} \Rightarrow R_b = 3 \times R_s = 24 \text{ Kbps}$$

If binary PAM wave is to be transmitted over a baseband channel with an absolute maximum bandwidth of 75 KHz. The bit duration is $10 \mu\text{s}$. Find a raised-cosine spectrum to satisfy these requirements.

解 $T_b = 10 \mu\text{s} = 10^{-5} \text{ s} \Rightarrow R_b = 10^5 \text{ bps}$, 故

$$W = \frac{R_b}{2} = 5 \times 10^4 \text{ Hz} = 50 \text{ KHz}$$

$$B_T = 75 \text{ KHz} = (1 + \alpha)W \Rightarrow \alpha = 0.5$$

