# 資訊科技概論

## 第2章　數字系統與資料表示法

# 目錄

- ## 2-3　數值表示法

  2-3-1　帶符號大小

  2-3-2　1’s補數

  2-3-3　2’s補數

- ## 2-4　數值算術運算

  2-4-1　加法

  2-4-2　減法

  2-4-3　乘法

  2-4-4　除法

- 2-5　數碼系統
  - 2-5-1　BCD碼
  - 2-5-4　超三碼
- 2-7　文字表示法
- 2-8　圖形表示法
  - 2-8-1　點陣圖
  - 2-8-2　向量圖
- 2-9　聲音表示法

## ♦ 2-10　資料壓縮

2-10-1　變動長度編碼

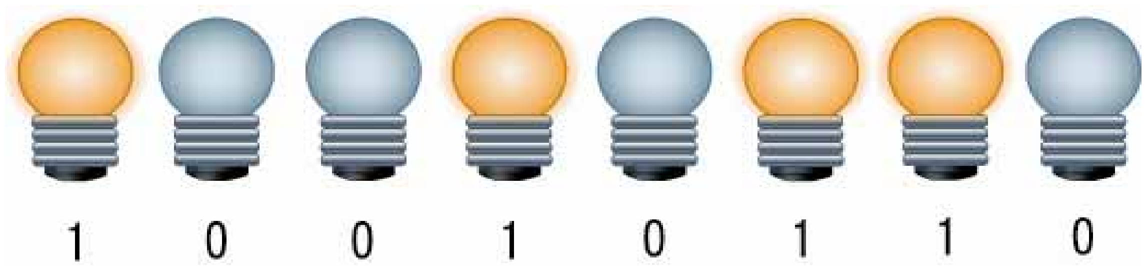
2-10-2　霍夫曼碼

## ♦ 2-11　誤差與錯誤檢查

2-11-1　同位位元檢查

# 2-1 電腦的基本單位

- 0與1是電腦的基本單位，就像符號一樣，不涉及數值大小。
- 我們將0或1稱為一個位元 (bit)，而這種只有「關」或「開」兩種狀態的系統稱為二進位系統 (binary system) 。



| 單位 | 位元數目 | 簡寫 |
|---|---|---|
| 位元組（byte） | 8位元 | B |
| 字組（word） | 16位元 | W |
| 雙字組（double word ） | 32位元 | DW |
| 四字組（quad word） | 64位元 | QW |

| 單位 | 簡寫 | 準確值 | 近似值 |
|---|---|---|---|
| 千位元組 (kilobyte) | KB | $2^{10}$Bytes | $10^{3}$Bytes |
| 百萬位元組 (megabyte) | MB | $2^{20}$Bytes | $10^{6}$Bytes |
| 十億位元組 (gigabyte) | GB | $2^{30}$Bytes | $10^{9}$Bytes |
| 兆位元組 (terabyte) | TB | $2^{40}$Bytes | $10^{12}$Bytes |
| 千兆位元組 (petabyte) | PB | $2^{50}$Bytes | $10^{15}$Bytes |
| 百京位元組 (exabyte) | EB | $2^{60}$Bytes | $10^{18}$Bytes |

- 電腦的資料傳輸速率是以bps為單位，意指每秒鐘能夠傳輸多少位元。
- 我們通常採用Kbps 、Mbps 、Gbps 等單位，意指每秒鐘傳輸1,024（$2^{10}$）、1,048,576（$2^{20}$）、1,073,741,824（$2^{30}$）位元，也就是每秒鐘傳輸約1千（$10^3$）、1百萬（$10^6$）、10億（$10^9$）位元。

# 2-2 數字系統

♦ 任何一個屬於K進位系統的正數N都可以表示成如下多項式：

$$N = d_{p-1}K^{p-1} + d_{p-2}K^{p-2} + \ldots + d_1K^1 + d_0K^0 + d_{-1}K^{-1} + d_{-2}K^{-2} + \ldots + d_{-q}K^{-q}$$

$$= \sum_{i=-q}^{p-1} d_i K^i \text{ , } 0 \leq d_i \leq K-1 \text{ , } -q \leq i \leq p-1$$

♦ N通常寫成$N_K = (d_{p-1}d_{p-2}\cdots d_1d_0.d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-q})_K$

- 舉例來說，$12345.678_{10}$是一個十進位數字，我們可以將它表示成如下多項式：

$$
\begin{aligned}
12345.678_{10} = {} & 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + \\
& 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + \\
& 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

- $1101010.11_2$是一個二進位數字，我們可以將它表示成如下多項式：

$$
\begin{aligned}
1101010.11_2 = {} & 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + \\
& 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + \\
& 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}
\end{aligned}
$$

- $1234.567_8$是一個八進位數字，我們可以將它表示成如下多項式：

$$1234.567_8 = 1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} + 6 \times 8^{-2} + 7 \times 8^{-3}$$

- $56789A.BC_{16}$是一個十六進位數字，我們可以將它表示成如下多項式：

$$56789A.BC_{16} = 5 \times 16^5 + 6 \times 16^4 + 7 \times 16^3 + 8 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 10 \times 16^0 + 11 \times 16^{-1} + 12 \times 16^{-2}$$

# 2-2-1　二進位系統

- 二進位系統（binary system）是以0、1等兩個數字做為計數的基底。
- 為了簡化起見，我們通常將二進位數字1000和十進位數字8寫成$1000_2$和$8_{10}$（或寫成$1000_2 = 8_{10}$）。

# 2-2-2 八進位系統

- 八進位系統（octal system）是以0、1、2 ~ 7等八個數字做為計數的基底。
- 由於$7_8$已經是八進位系統裡面一位數的最後一個數字，所以下一個數字（$8_{10}$）必須進位變成$10_8$，然後我們可以再往下數$11_8$（$9_{10}$）、$12_8$（$10_{10}$）、...$17_8$（$15_{10}$）、$20_8$（$16_{10}$）、$21_8$（$17_{10}$）、...$27_8$（$23_{10}$）、$30_8$（$24_{10}$）、$31_8$（$25_{10}$）、...$37_8$（$31_{10}$）、$40_8$（$32_{10}$）、...$77_8$（$63_{10}$），因為$77_8$是八進位系統裡面二位數的最後一個數字，所以下一個數字（$64_{10}$）必須進位變成$100_8$，其它請依此類推。

# 2-2-3 十六進位系統

- 十六進位系統（hexadecimal system）是以0、1、2 ~ 9、A、B、C、D、E、F等十六個數字做為計數的基底。
- 由於$F_{16}$（$15_{10}$）已經是十六進位系統裡面一位數的最後一個數字，所以下一個數字（$16_{10}$）必須進位變成$10_{16}$，然後我們可以再往下數$11_{16}$（$17_{10}$）、$12_{16}$（$18_{10}$）、...$19_{16}$（$25_{10}$）、$1A_{16}$（$26_{10}$）、$1B_{16}$（$27_{10}$）、...$1F_{16}$（$31_{10}$）、$20_{16}$（$32_{10}$）、 $21_{16}$（$33_{10}$）、...$2F_{16}$（$47_{10}$）、$30_{16}$（$48_{10}$）、$31_{16}$（$49_{10}$）、…$3F_{16}$（$63_{10}$）、...$FF_{16}$（$255_{10}$），因為$FF_{16}$是十六進位系統裡面二位數的最後一個數字，所以下一個數字（$256_{10}$）必須進位變成$100_{16}$，其它請依此類推。

| 十進位 | 二進位 | 八進位 | 十六進位 | 十進位 | 二進位 | 八進位 | 十六進位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0 | 0 | 16 | 10000 | 20 | 10 |
| 1 | 0001 | 1 | 1 | 17 | 10001 | 21 | 11 |
| 2 | 0010 | 2 | 2 | 18 | 10010 | 22 | 12 |
| 3 | 0011 | 3 | 3 | 19 | 10011 | 23 | 13 |
| 4 | 0100 | 4 | 4 | 20 | 10100 | 24 | 14 |
| 5 | 0101 | 5 | 5 | 21 | 10101 | 25 | 15 |
| 6 | 0110 | 6 | 6 | 22 | 10110 | 26 | 16 |
| 7 | 0111 | 7 | 7 | 23 | 10111 | 27 | 17 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 | 24 | 11000 | 30 | 18 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 | 25 | 11001 | 31 | 19 |
| 10 | 1010 | 12 | A | 26 | 11010 | 32 | 1A |
| 11 | 1011 | 13 | B | 27 | 11011 | 33 | 1B |
| 12 | 1100 | 14 | C | 28 | 11100 | 34 | 1C |
| 13 | 1101 | 15 | D | 29 | 11101 | 35 | 1D |
| 14 | 1110 | 16 | E | 30 | 11110 | 36 | 1E |
| 15 | 1111 | 17 | F | 31 | 11111 | 37 | 1F |

八、十、十六進位對照表

# 2-2-4　將二、八、十六進位數字轉換成十進位數字

$$
\begin{aligned}
5621.78_{10} &= (5 \times 1000) + (6 \times 100) + (2 \times 10) + (1 \times 1) + (7 \times 0.1) + (8 \times 0.01) \\
&= (5 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (7 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
51763.2_8 &= (5 \text{ x } 8^4) + (1 \text{ x } 8^3) + (7 \text{ x } 8^2) + \\
&\quad (6 \text{ x } 8^1) + (3 \text{ x } 8^0) + (2 \text{ x } 8^{-1}) \\
&= (5 \text{ x } 4096) + (1 \text{ x } 512) + (7 \text{ x } 64) + \\
&\quad (6 \text{ x } 8) + (3 \text{ x } 1) + (2 \text{ x } 0.125) \\
&= 20480_{10} + 512_{10} + 448_{10} + 48_{10} + \\
&\quad 3_{10} + 0.25_{10} \\
&= 21491.25_{10}
\end{aligned}
$$

$$F2A9.C_{16} = (F \times 16^3) + (2 \times 16^2) + (A \times 16^1) +$$
$$(9 \times 16^0) + (C \times 16^{-1})$$
$$= (15 \times 4096) + (2 \times 256) + (10 \times 16) +$$
$$(9 \times 1) + (12 \times 0.0625)$$
$$= 61440_{10} + 512_{10} + 160_{10} +$$
$$9_{10} + 0.75_{10}$$
$$= 62121.75_{10}$$

$$
\begin{aligned}
10110.0011_2 &= (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + \\
&\quad (1 \times 2^1) + (0 \times 2^0) + (0 \times 2^{-1}) + \\
&\quad (0 \times 2^{-2}) + (1 + 2^{-3}) + (1 + 2^{-4}) \\
&= (1 \times 16) + (0 \times 8) + (1 \times 4) + \\
&\quad (1 \times 2) + (0 \times 1) + (0 \times 0.5) + \\
&\quad (0 \times 0.25) + (1 \times 0.125) + \\
&\quad (1 \times 0.0625) \\
&= 16_{10} + 4_{10} + 2_{10} + 0.125_{10} + 0.0625_{10} \\
&= 22.1875_{10}
\end{aligned}
$$

# 2-2-5　將十進位數字轉換成二、八、十六進位數字

♦ 將十進位數字$59.75_{10}$轉換成二進位數字：

（1）$59.75_{10} = 59_{10} + 0.75_{10}$

（2）找出整數部分的二進位表示法

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 59 | 1（59除以2的餘數） |
| 2 | 29 | 1（29除以2的餘數） |
| 2 | 14 | 0（14除以2的餘數） |
| 2 | 7 | 1（7除以2的餘數） |
| 2 | 3 | 1（3除以2的餘數） |
| | 1 | 1（最大有效字元） |

商數小於除數時停止，依反方向寫下餘數得到$59_{10} = 111011_2$

（3）找出小數部分的二進位表示法

0.75 ← 取得小數部分乘以2

x 2

小數點右邊第一位 → 1.50

0.50 ← 取得小數部分乘以2

x 2

小數點右邊第二位 → 1.00 ← 小數部分等於0時停止

依序寫下乘以2之積數的整數部分得到$0.75_{10} = 0.11_2$

（4）將整數部分及小數部分的二進位表示法合併得到$59.75_{10} = 111011.11_2$

◆將十進位數字$5176.3125_{10}$轉換成八進位數字：

（1）$5176.3125_{10} = 5176_{10} + 0.3125_{10}$

（2）找出整數部分的八進位表示法

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5176 | 0 (5176除以8的餘數) |
| 8 | 647 | 7 (647除以8的餘數) |
| 8 | 80 | 0 (80除以8的餘數) |
| 8 | 10 | 2 (10除以8的餘數) |
| | 1 | 1 (最大有效數字) |

商數小於除數時停止，依反方向寫下餘數得到$5176_{10} = 12070_8$

（3）找出小數部分的八進位表示法

$$
\begin{array}{rl}
0.3125 & \longleftarrow \text{取得小數部分乘以8} \\
\times \quad\quad 8 & \\
\hline
\text{小數點右邊第一位} \longrightarrow 2.5000 & \\
\hline
0.5000 & \longleftarrow \text{取得小數部分乘以8} \\
\times \quad\quad 8 & \\
\hline
\text{小數點右邊第二位} \longrightarrow 4.0000 &
\end{array}
$$

依序寫下乘以8之積數的整數部分得到$0.3125_{10} = 0.24_8$

（4）將整數部分及小數部分的八進位表示法合併，得到
$5176.3125_{10} = 12070.24_8$。

♦ 將十進位數字$4877.6_{10}$轉換成十六進位數字 ：

（1）$4877.6_{10} = 4877_{10} + 0.6_{10}$

（2）找出整數部分的十六進位表示法

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 4877 | 13（4877除以16的餘數） |
| 16 | 304 | 0（304除以16的餘數） |
| 16 | 19 | 3（19除以16的餘數） |
| | 1 | 1（最大有效數字） |

商數小於除數時停止，依反方向寫下餘數得到$4877_{10} = 130D_8$

（3）找出小數部分的十六進位表示法

$$
\begin{array}{r}
0.6 \\
\times \quad 16 \\
\hline
9.6 \\
\hline
0.6
\end{array}
$$

0.6 ← 取得小數部分乘以16

小數點右邊第一位 → 9.6

0.6 ← 出現循環時停止（從小數點右邊第一位開始）

依序寫下乘以16之積數的整數部分，得到$0.6_{10} = 0.\overline{9}_{16}$

（4）將整數部分及小數部分的十六進位表示法合併，得到

$4877.6_{10} = 130D.\overline{9}_{16}$

# 2-2-6 將八或十六進位數字轉換成二進位數字

$$5\ 7\ 6\ 2.\ 1\ 3_8 = \underline{101}\ \underline{111}\ \underline{110}\ \underline{010.}\ \underline{001}\ \underline{011}_2$$

$$E\ 8\ C\ 4.\ B_{16} = \underline{1110}\ \underline{1000}\ \underline{1100}\ \underline{0100}.\ \underline{1011}_2$$

# 2-2-7　將二進位數字轉換成八或十六進位數字

$$\underline{011}\ \underline{010}\ \underline{111}.\underline{101}\ \underline{100}_2 = 3\ 2\ 7.\ 5\ 4_8$$

整數部分每三個數字一組，不足三個的就在左邊補上0

小數部分每三個數字一組，不足三個的就在右邊補上0

$$0010\ 1101\ 0111\ 1010.\ 1111\ 0010_2 = 2\ D\ 7\ A.\ F\ 2_{16}$$

整數部分每四個數字一組，不足四個的就在左邊補上0

小數部分每四個數字一組，不足四個的就在右邊補上0

# 2-3 數值表示法

## 2-3-1 帶符號大小

假設使用n位元來表示正負整數，那麼最左邊的位元（MSD）是整數的正負符號，0表示正數，1表示負數，剩下的n – 1位元才是整數的數值大小，正整數的範圍為0 ~ $2^{n-1}$–1，負整數的範圍為 -($2^{n-1}$–1) ~ 0。

## 2-3-2　1’s補數

- 假設使用n位元來表示正負整數，那麼最左邊的位元（MSD）是整數的正負符號，0表示正數，1表示負數，剩下的n – 1位元才是整數的數值大小，正整數的範圍為0 ~ $2^{n-1}-1$，負整數的範圍為 $-(2^{n-1}-1)$ ~ 0。
- 1’s補數的正數表示法和帶符號大小一樣，但負數表示法就不一樣了，它是將某個正整數的表示法中所有0改為1，所有1改為0，之後得到的二進位字串才是這個正整數對應的負整數。

## 2-3-3　2’s補數

- 假設使用n位元來表示正負整數，那麼最左邊的位元（MSD）是整數的正負符號，0表示正數，1表示負數，剩下的n – 1位元才是整數的數值大小，正整數的範圍為0 ~ $2^{n-1}-1$，負整數的範圍為 $-2^{n-1}$ ~ 0。
- 2’s補數的正數表示法和帶符號大小、1’s補數一樣，但負數表示法就不一樣了，它是將某個正整數的表示法中所有0改為1，所有1改為0，之後得到的二進位字串再加上1，才是這個正整數對應的負整數。

| 十進位 | 帶符號大小 | 1’s補數 | 2’s補數 | 十進位 | 帶符號大小 | 1’s補數 | 2’s補數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +8 | 無 | 無 | 無 | -8 | 無 | 無 | 1000 |
| +7 | 0111 | 0111 | 0111 | -7 | 1111 | 1000 | 1001 |
| +6 | 0110 | 0110 | 0110 | -6 | 1110 | 1001 | 1010 |
| +5 | 0101 | 0101 | 0101 | -5 | 1101 | 1010 | 1011 |
| +4 | 0100 | 0100 | 0100 | -4 | 1100 | 1011 | 1100 |
| +3 | 0011 | 0011 | 0011 | -3 | 1011 | 1100 | 1101 |
| +2 | 0010 | 0010 | 0010 | -2 | 1010 | 1101 | 1110 |
| +1 | 0001 | 0001 | 0001 | -1 | 1001 | 1110 | 1111 |
| +0 | 0000 | 0000 | 0000 | -0 | 1000 | 1111 | 0000 |

表2.4不同數值表示法對照表