

Ch3 電機能量 轉換原理

- ▶ 而本章將從另外一種物理觀點——能量出發，也就是利用電能、磁能與機械能三者之間在特定結構中的彼此消長與轉換，來發展電機機械產生力量與力矩的數學關係。

3-1 磁場力

- ▶ 勞侖茲力 (Lorentz force) ,

$$\bar{\mathbf{F}} = q(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (3-1)$$

- ▶ 其中 q 與 $\bar{\mathbf{v}}$ 分別為帶電粒子之電荷與速度，而 $\bar{\mathbf{E}}$ 與 $\bar{\mathbf{B}}$ 則是該帶電粒子所處環境的電場強度與磁通密度之向量空間描述。
- ▶ 磁場力 (magnetic force) ,

$$\bar{\mathbf{F}} = I \bar{\ell} \times \bar{\mathbf{B}} \quad (3-5)$$

- ▶ 其中 I 為導線電流大小，且 $\bar{\ell}$ 為該導線向量。

3-1 磁場力

例 3-1

考慮一直流電動機示意圖如下，其中定子提供一均勻磁場環境，其磁通密度向量為 $\bar{\mathbf{B}} = B\mathbf{a}_x$ 韋伯 / 平方公尺，而轉子半徑為 r 公尺，長度為 ℓ 公尺，且轉子之兩導體皆通過 I 安培之電流。試以「帶有電流導體在磁場中會產生作用力」的觀念推導出此電動機之轉矩公式。

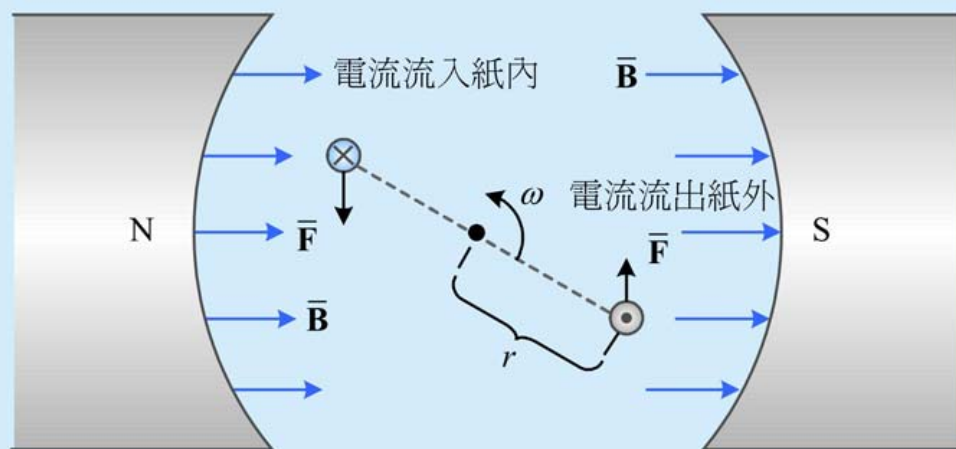


圖 3-1 直流電動機轉子線圈示意圖

3-1 磁場力

解 利用 (3-5) 式，考慮帶有電流 I 之兩導體，其中電流流出紙面（ $\bar{\mathbf{a}}_z$ 方向）之導體所受之磁場力為

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = I\ell\bar{\mathbf{a}}_z \times B\bar{\mathbf{a}}_x = I\ell B\bar{\mathbf{a}}_y$$

此力將產生一逆時針方向之轉子力矩，其大小為

$$T_1 = I\ell Br \cos\theta$$

故兩導體所產生之力矩和大小為

$$T = 2T_1 = 2I\ell Br \cos\theta$$

End

3-2 電磁能與機械能的轉換

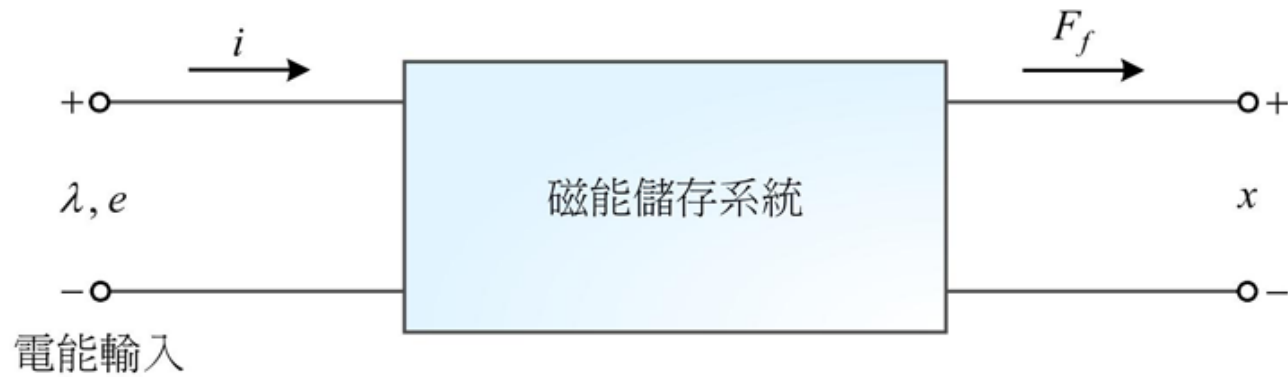


圖 3-2 電磁能與機械能之轉換系統示意圖

3-2 電磁能與機械能的轉換

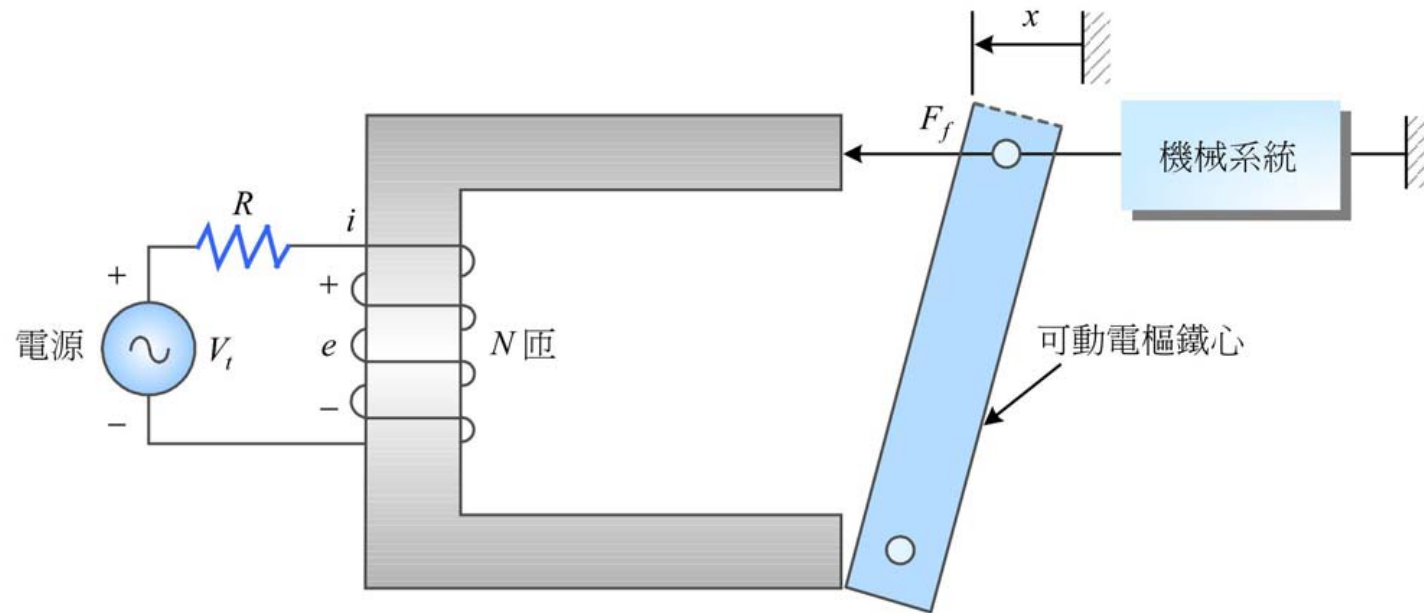


圖 3-3 電磁電驛

3-2 電磁能與機械能的轉換

一、系統電磁力 F_f 之推導

- ▶ 考慮無損耗 (lossless) 的情況，則此系統的能量轉換過程可表為

$$\text{電能輸入增量} = [\text{機械能輸出增量}] + [\text{磁能儲存增量}] \quad (3-6)$$

- ▶ 機械能輸出增量為

$$dW_{mech} = F_f dx \quad (3-7)$$

- ▶ 而電能之輸入增量為

$$dW_{elec} = eidt \quad (3-8)$$

$$dW_{elec} = \frac{d\lambda}{dt} idt = id\lambda \quad (3-9)$$

$$dW_f = id\lambda - F_f dx \quad (3-10)$$

3-2 電磁能與機械能的轉換

一、系統電磁力 F_f 之推導 (續)

- ▶ 仔細觀察 (3-10) 式，我們發現上述電磁能與機械能轉換系統之磁能儲存增量 dW_{fld} 在數學的描述上，總共受到兩個獨立變量的影響，分別為 $d\lambda$ 與 dx ，顯見此系統之磁能儲存總量必同時為變數 λ (磁交鏈) 與 x (位移) 之函數，換言之

$$W_f = W_f(\lambda, x) \quad (3-11)$$

3-2 電磁能與機械能的轉換

一、系統電磁力 F_f 之推導 (續)

- ▶ 利用多元函數微分公式得

$$dW_f = \frac{\partial W_f}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_f}{\partial x} dx \quad (3-12)$$

- ▶ 再比對 (3-10) 與 (3-12) 兩式，可推導得知此電機系統所產生之力為

$$F_f = - \frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x} \quad (3-13)$$

3-2 電磁能與機械能的轉換

二、系統之磁能儲存總量 $W_f(\lambda, x)$ 之計算

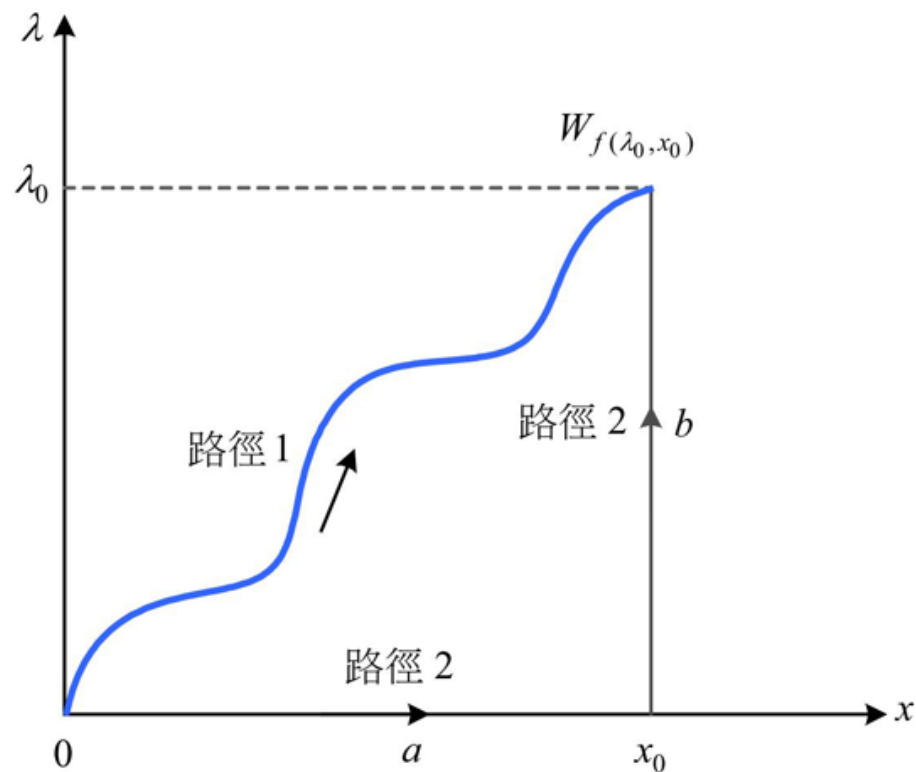


圖 3-4 $W_f(\lambda, x)$ 的積分路徑

3-2 電磁能與機械能的轉換

二、系統之磁能儲存總量 $W_f(\lambda, x)$ 之計算 (續)

- ▶ 因 $W_{fld}(\lambda_0, x_0)$ 值之計算與圖3-4中的積分路徑無關，故可選擇較單純的路徑2得

$$W_f(\lambda_0, x_0) = \int_{\text{路徑 } 2a} dW_f + \int_{\text{路徑 } 2b} dW_f \quad (3-14)$$

$$W_f(\lambda_0, x_0) = \int_{\text{路徑 } 2b} dW_f = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda \quad (3-15)$$

- ▶ 線性系統

$$\lambda = L(x)i \quad (3-16)$$

$$W_f(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{L(x)} d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} \quad (3-17)$$

3-2 電磁能與機械能的轉換

例 3-2

圖 3-5 所示由具無限導磁係數的磁性材料與一可動柱塞製成的電驛，柱塞亦為無限導磁係數之材料，柱塞高度遠大於氣隙長 ($h \gg g$)。若 $N = 500$ 匝， $g = 0.001$ 公尺， $d = 0.1$ 公尺， $\ell = 0.1$ 公尺，及 $i = 5$ 安培，試以塞柱位置 ($0 < x < d$) 函數，計算作用於柱塞的磁場力 F_f 。

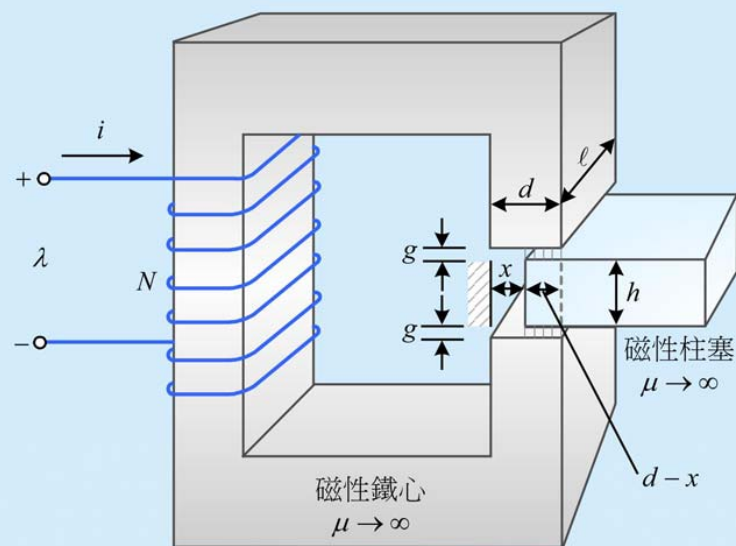


圖 3-5 具可動柱塞之電驛氣隙結構

3-2 電磁能與機械能的轉換

解 磁能 $W_f = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)}$ 且 $L(x) = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = \frac{N^2 \mu_0 A_{gap}}{2g}$

其中 A_{gap} 為氣隙截面積

$$A_{gap} = \ell(d-x) = \ell d \left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

因此 $L(x) = \frac{N^2 \mu_0 \ell d (1-x/d)}{2g}$

故磁能 $W_f(\lambda, x) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} = \frac{g\lambda^2}{N^2 \mu_0 \ell d (1-x/d)}$

利用 (3-13) 式推導作用於柱塞的磁場力得

$$\begin{aligned} F_f &= -\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x} = -\frac{g\lambda^2}{N^2 \mu_0 \ell d^2 (1-x/d)^2} \\ &= -\frac{gL^2(x) i^2}{N^2 \mu_0 \ell d^2 (1-x/d)^2} = -\frac{N^2 \mu_0 \ell}{4g} i^2 \end{aligned}$$

帶入數值

$$\begin{aligned} \therefore F_f &= -\frac{N^2 \mu_0 \ell}{4g} i^2 = -\frac{500^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0.1}{4 \times 0.001} \times 5^2 \\ &= -196.35 \text{ 牛頓} \end{aligned}$$

3-2 電磁能與機械能的轉換

Matlab

```
N=500;  
g=0.0001;  
d=0.1;  
l=0.1;  
i=5;  
mu_0=4*pi*1E-7;  
  
x=d/2;          %令柱塞位於中央的位置  
Ag=(d-x)*l;  
R=2*g/(mu_0*Ag);  
phi=N*i/R;  
lambda=N*phi;  
L=N^2/R;  
Rf=lambda^2/L/2;  
dx=0.00001*d;  %柱塞位移量  
x=x+dx;  
Ag=(d-x)*l;  
R=2*g/(mu_0*Ag);  
L=N^2/R;       %電感值 L 隨著 x 而改變  
  
dRf=lambda^2/L/2-Rf; %注意：lambda 值保持固定，不隨 x 而改變  
Ff=-dRf/dx; %磁能對 x 偏微
```

End

3-2 電磁能與機械能的轉換

- ▶ 對線性系統而言，磁能的計算公式除了 (3-17) 式之外，還可以利用 (3-16) 式的關係，以電流 i 取代磁交鏈得

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (3-18)$$

3-3 共能理論

$$W_f(\lambda_0, x_0) = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda \quad (3-19)$$

- ▶ 系統之磁能總量 W_f 等於圖中曲線上半部 (即陰影部分) 的面積。
- ▶ 定義圖中曲線的下半部 (斜線部分) 面積為系統之共能 W'_f ，即

$$W'_f = i\lambda - W_f(\lambda, x) \quad (3-20)$$

- ▶ 接著對共能微分得其變量為

$$\begin{aligned} dW'_f &= d(i\lambda) - dW_f(\lambda, x) \\ &= id\lambda + \lambda di - (id\lambda - F_f dx) = \lambda di + F_f dx \end{aligned} \quad (3-21)$$

3-3 共能理論

- ▶ 顯見共能必為變數 i (電流) 與 x (位移) 之函數

$$W'_f = W'_f(i, x) \quad (3-22)$$

$$W'_f(i, x) = \int_0^i \lambda(i, x) di \quad (3-23)$$

- ▶ 當求得共能函數之後，系統的磁場力即可從 (3-21) 式的共能變量式導出，亦即將 $W'_f(i, x)$ 對變數 x 偏微而得

$$F_f = \frac{\partial W'_f(i, x)}{\partial x} \quad (3-24)$$

3-3 共能理論

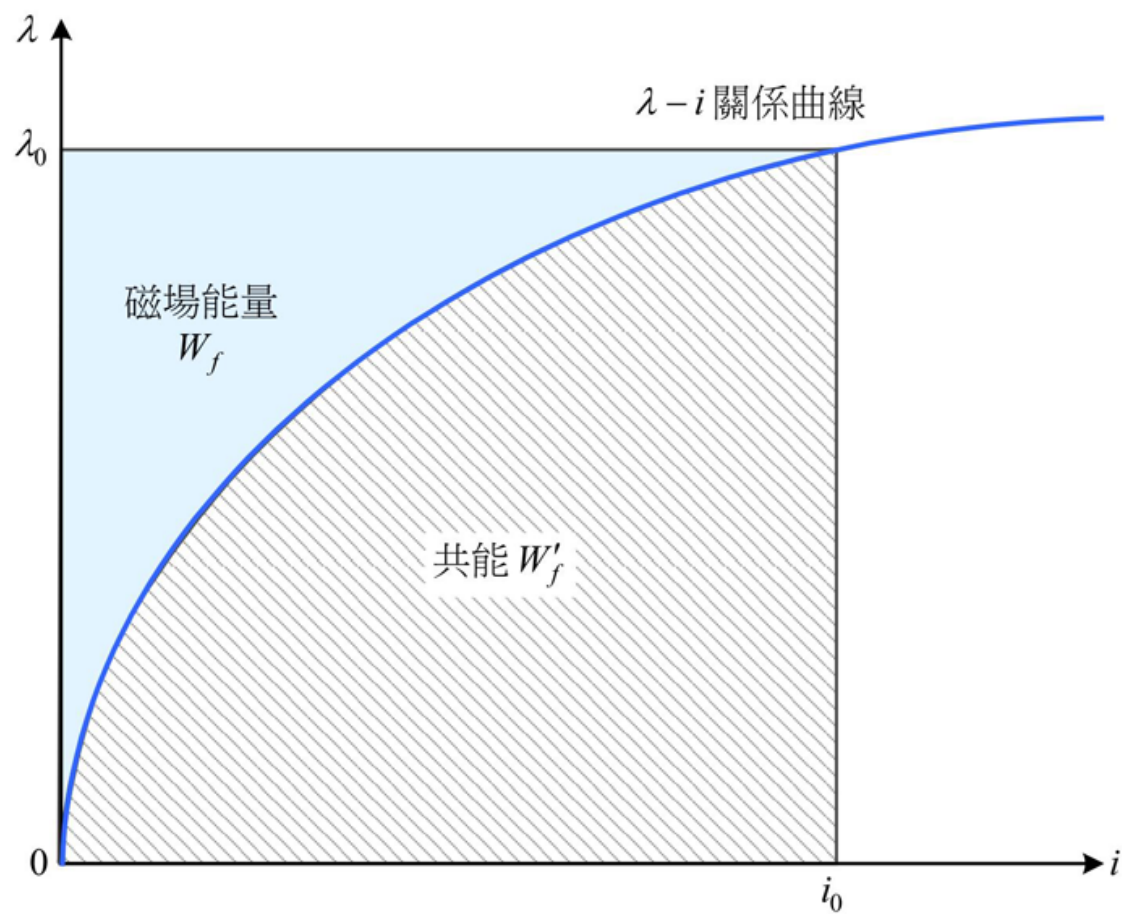


圖 3-6 $\lambda - i$ 特性曲線

3-3 共能理論

例 3-3

一磁路的 $\lambda - i$ 特性曲線如圖 3-7 所示，試求此磁路在 a 點及 b 點磁能 W_f 與共能 W'_f 各為多少？

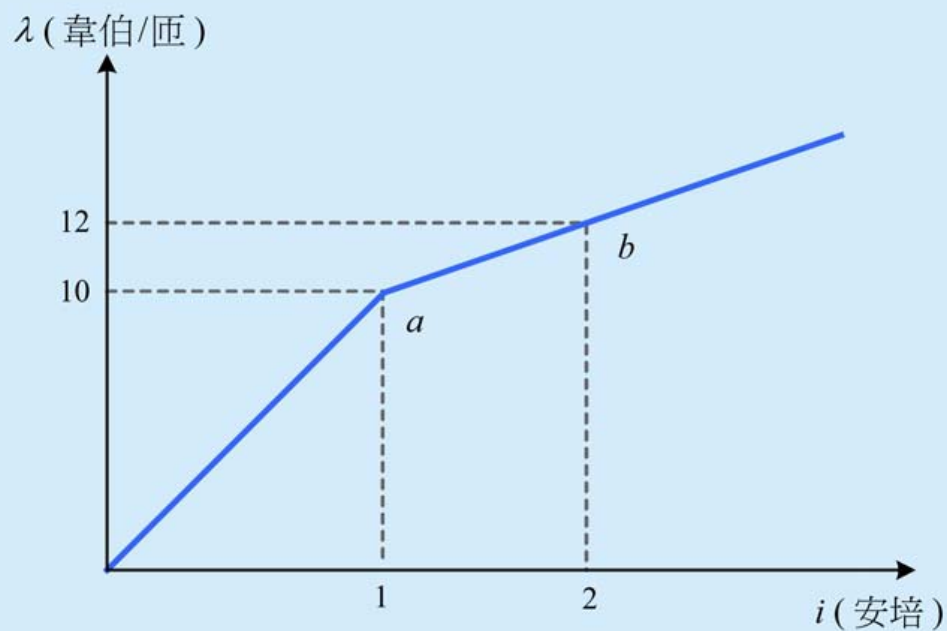


圖 3-7 $\lambda - i$ 特性曲線

3-3 共能理論

解 a 點的磁能 W_{fa}

$$W_{fa} = \int_0^{\lambda} id\lambda = \int_0^{10} 10\lambda d\lambda = 5\lambda^2 \Big|_0^{10} = 500 \text{ 焦耳}$$

自 a 點到 b 點線段方程式為 $i = (\lambda - 8)/2$ ，故所增加的磁能 W_{fab}

$$W_{fab} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} id\lambda = \int_{10}^{12} \frac{1}{2}(\lambda - 8)d\lambda = \left[\frac{1}{4}\lambda^2 - 4\lambda \right]_{10}^{12} = 3 \text{ 焦耳}$$

在 b 點的全部磁能

$$W_{fb} = W_{fa} + W_{fab} = 500 + 3 = 503 \text{ 焦耳}$$

在 a 點的共能 W'_{fa}

$$W'_{fa} = \int_0^i \lambda di = \int_0^1 10idi = 5i^2 \Big|_0^1 = 5 \text{ 焦耳}$$

3-3 共能理論

由 a 點到 b 點線段方程式為 $\lambda = 2i + 8$ ，故所增加的共能 W'_{fab}

$$W'_{fab} = \int_{i_1}^{i_2} \lambda di = \int_1^2 (2i + 8) di = [i^2 + 8i] \Big|_1^2 = 11 \text{ 焦耳}$$

在 b 點的全部共能為

$$W'_{fb} = W'_{fa} + W'_{fab} = 5 + 11 = 16 \text{ 焦耳}$$

End

3-3 共能理論

例 3-4

針對例 3-2 的電驛（如圖 3-5），當線圈電流保持 5 安培時，試計算儲存共能 W'_f 以及作用於柱塞的磁場力 F_f 。

解 共能 $W'_f = \frac{1}{2} L(x) i^2$

$$\text{而 } L(x) = \frac{N^2 \mu_0 \ell d (1 - x/d)}{2g}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{共能 } W'_f &= \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 \ell d (1 - x/d)}{2g} i^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{500^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0.1 \times 0.1 \times (1 - x/d)}{2 \times 0.001} \times 5^2 \\ &= 19.635 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \text{焦耳} \end{aligned}$$

3-3 共能理論

利用 (3-24) 式以共能推導作用於柱塞的磁場力得

$$F_f = \frac{\partial W'_f}{\partial x} = -\frac{N^2 \mu_0 \ell}{4g} i^2$$

帶入數值

$$\begin{aligned} \therefore F_f &= -\frac{N^2 \mu_0 \ell}{4g} i^2 = -\frac{500^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0.1}{4 \times 0.001} \times 5^2 \\ &= -196.35 \text{ 牛頓} \end{aligned}$$

利用 (3-13) 式以磁能推導作用於柱塞的磁場力得

$$\begin{aligned} F_f &= -\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x} = -\frac{g\lambda^2}{N^2 \mu_0 \ell d^2 (1-x/d)^2} \\ &= -\frac{gL^2(x) i^2}{N^2 \mu_0 \ell d^2 (1-x/d)^2} = -\frac{N^2 \mu_0 \ell}{4g} i^2 \\ \therefore F_f &= -\frac{N^2 \mu_0 \ell}{4g} i^2 = -\frac{500^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0.1}{4 \times 0.001} \times 5^2 \\ &= -196.35 \text{ 牛頓} \end{aligned}$$

3-3 共能理論

Matlab

```
N=500;  
g=0.0001;  
d=0.1;  
l=0.1;  
i=5;  
mu_0=4*pi*1E-7;  
  
x=d/2;      %令柱塞位於中央的位置  
Ag=(d-x)*l;  
R=2*g/(mu_0*Ag);  
L=N^2/R;  
Rf_prime=L*i^2/2;  
  
dx=0.00001*d;  %柱塞位移量  
x=x+dx;  
Ag=(d-x)*l;  
R=2*g/(mu_0*Ag);  
L=N^2/R;      %電感值 L 隨著 x 而改變  
  
dRf_prime=L*i^2/2-Rf_prime;  
Ff=dRf_prime/dx; %共能對 x 偏微
```

End

3-3 共能理論

例 3-5

如圖 3-8 所示為一旋轉電機，稱為磁阻電動機 (reluctance motor)，轉子可繞著垂直軸自由轉動。若不考慮邊緣效應，且 $g = 0.002$ 公尺， $r = h = 0.03$ 公尺，磁通密度 $B = 4$ 韋伯 / 米²，試求轉矩為若干牛頓 - 米？

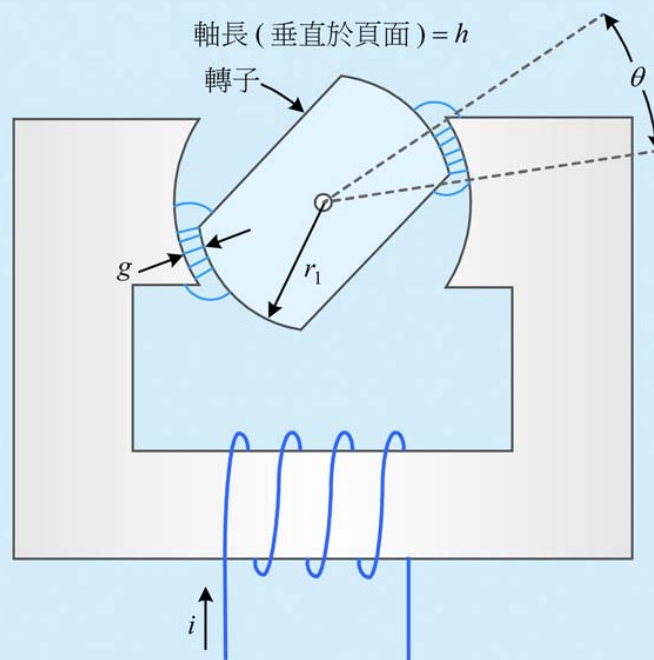


圖 3-8 旋轉電機磁性系統

3-3 共能理論

解 考慮兩重氣隙之磁阻

$$R(\theta) = \frac{2g}{\mu_0 A(\theta)} = \frac{2g}{\mu_0 (r_1 + 0.5g)\theta h}$$

$$\text{而磁場共能為 } W'_f = \frac{1}{2} L(\theta) i^2 = \frac{1}{2} \frac{(Ni)^2}{R(\theta)}$$

$$\text{又 } Ni = \phi R(\theta) = BA(\theta)R(\theta) = \frac{2B_{ag}g}{\mu_0}$$

$$\text{故磁場共能為 } W'_f = \frac{1}{2} \left(\frac{2B_{ag}g}{\mu_0} \right)^2 \frac{\mu_0 (r_1 + 0.5g)\theta h}{2g} = \frac{B_{ag}^2 (r_1 + 0.5g)gh\theta}{\mu_0}$$

$$\therefore T_f = \frac{\partial W'_f(H_{ag}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{B_{ag}^2 (r_1 + 0.5g)gh}{\mu_0}$$

$$= \frac{4^2 \times (0.03 + 0.5 \times 0.002) \times 0.002 \times 0.03}{4\pi \times 10^{-7}} = 23.68 \text{ 牛頓} \cdot \text{米}$$

End

3-4 單激系統與多激系統

- ▶ 當輸入端僅為單一電源時，如圖3-2所示，我們稱此電機為單激 (singly-excited) 系統。若輸入端不只一組電源，則此電機為多激 (multiply-excited) 系統，如圖3-9所示。



圖 3-9 多激系統示意圖

3-4 單激系統與多激系統

- ▶ 圖3-9為一多激旋轉式電機示意圖，共有兩組電能輸入與一組機械能輸出，沿用(3-10)式的能量流觀念，此多激系統內部的磁能變動量為

$$dW_f(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 - T_f d\theta \quad (3-30)$$

- ▶ 其中 T_f 為輸出力矩， θ 為轉子角度。
- ▶ 圖3-10為一多激旋轉式電機，其中定子與轉子各有一個激磁線圈，並自接上其輸入電源。此多激系統之共能一般式為

$$W'_f(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_{11}(\theta) i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}(\theta) i_2^2 + L_{12}(\theta) i_1 i_2 \quad (3-31)$$

3-4 單激系統與多激系統

- ▶ 其中 $L_{11}(\theta)$ 為定子線圈的自感， $L_{22}(\theta)$ 為轉子線圈的自感， $L_{21}(\theta) = L_{12}(\theta)$ 為兩線圈之互感。當定子與轉子各自投入電流 i_1 與 i_2 時，此電機將產生轉矩

$$T_f = \frac{\partial W'_f(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{dL_{11}(\theta)}{d\theta} i_1^2 + \frac{1}{2} \frac{dL_{22}(\theta)}{d\theta} i_2^2 + \frac{dL_{12}(\theta)}{d\theta} i_1 i_2 \quad (3-32)$$

3-4 單激系統與多激系統

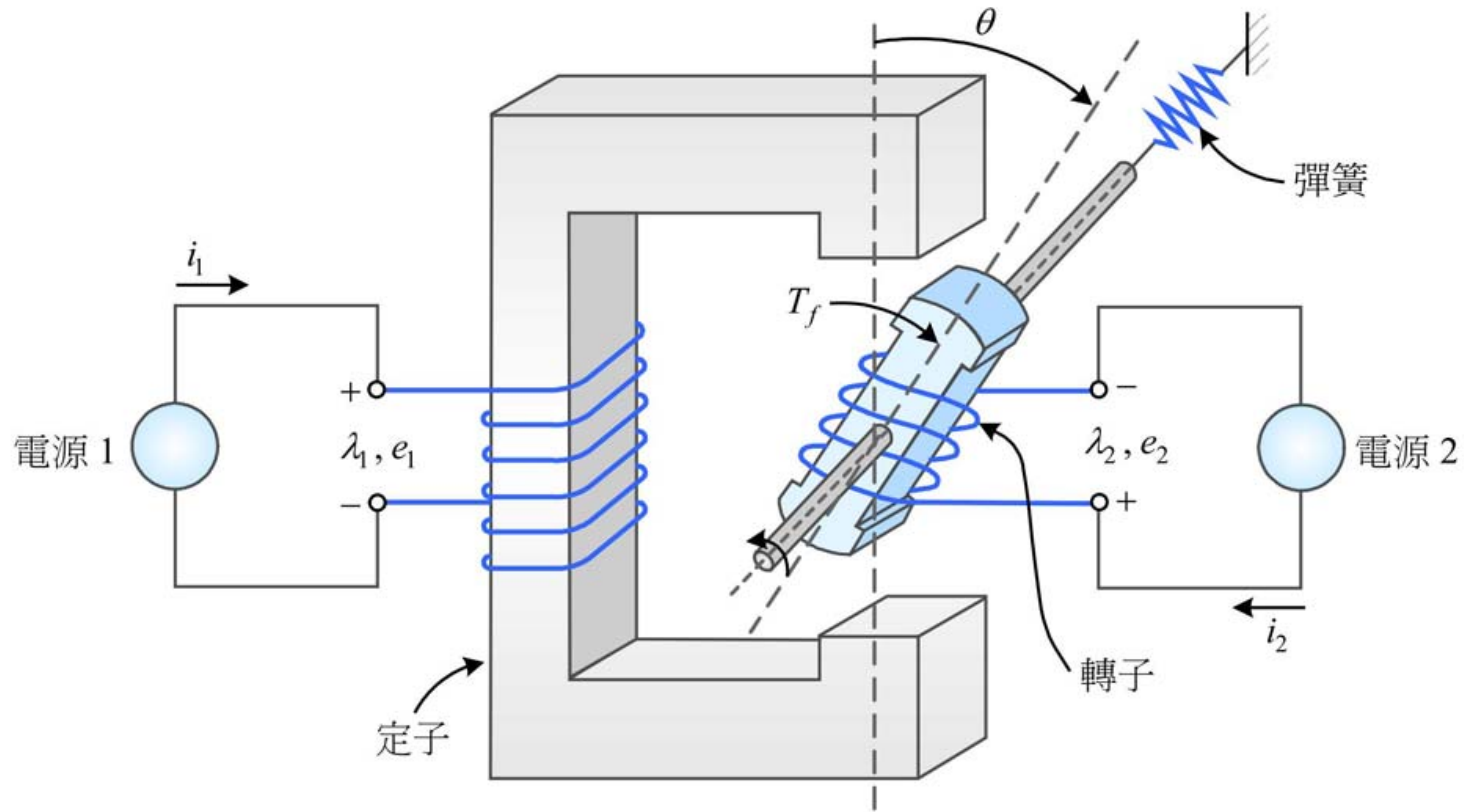


圖 3-10 多激旋轉式電機

3-4 單激系統與多激系統

例 3-6

如圖 3-10 所示為一部有兩個互耦線圈電機，第一個線圈在定子，第二個線圈在轉子，線圈間的電感為 $L_{11} = 5 + \cos 2\theta$ 亨利、 $L_{22} = 30 + 5\cos 2\theta$ 亨利、 $L_{12} = 0.2\cos\theta$ 亨利。若電流 $i_1 = 10$ 安培， $i_2 = 4$ 安培，試求轉矩 T_f 為多少牛頓 - 米？令轉子位於 $\theta = 30^\circ$ 處，試計算轉矩 T_f 之數值。

3-4 單激系統與多激系統

解 系統共能 W'_f :

$$\begin{aligned}W'_f(i_1, i_2, \theta) &= \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 \\&= \frac{1}{2}(5 + \cos 2\theta)i_1^2 + (0.2 \cos \theta)i_1i_2 + \frac{1}{2}(30 + 5 \cos 2\theta)i_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore T_f &= \left. \frac{W'_f(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \right|_{i_1=10\text{ A}, i_2=4\text{ A}} \\&= (-\sin 2\theta i_1^2 - 0.2 \sin \theta i_1 i_2 - 5 \sin 2\theta i_2^2) \Big|_{i_1=10\text{ A}, i_2=4\text{ A}} \\&= -180 \sin 2\theta - 8 \sin \theta \text{ 牛頓 - 米}\end{aligned}$$

當轉子位於 $\theta = 30^\circ$ 時，帶入上式得

$$T_f = -180 \sin 60^\circ - 8 \sin 30^\circ = -159.885 \text{ 牛頓 - 米}$$

3-4 單激系統與多激系統

Matlab

```
i1=10;
i2=4;

theta=30*pi/180;    %設定 theta 的初始位置為 30 度
L11=5+cos(2*theta);
L22=30+5*cos(2*theta);
L12=0.2*cos(theta);

Wf_prime=L11*i1^2/2+L12*i1*i2+L22*i2^2/2;    %共能計算

dtheta=theta*0.00001;    %theta 之微量變動值
theta=theta+dtheta;
L11=5+cos(2*theta);
L22=30+5*cos(2*theta);
L12=0.2*cos(theta);

dWf_prime=L11*i1^2/2+L12*i1*i2+L22*i2^2/2-Wf_prime;
Tf=dWf_prime/dtheta;    %共能對 theta 偏微
```

End