

## 實驗六 複擺實驗

### 一、目的：

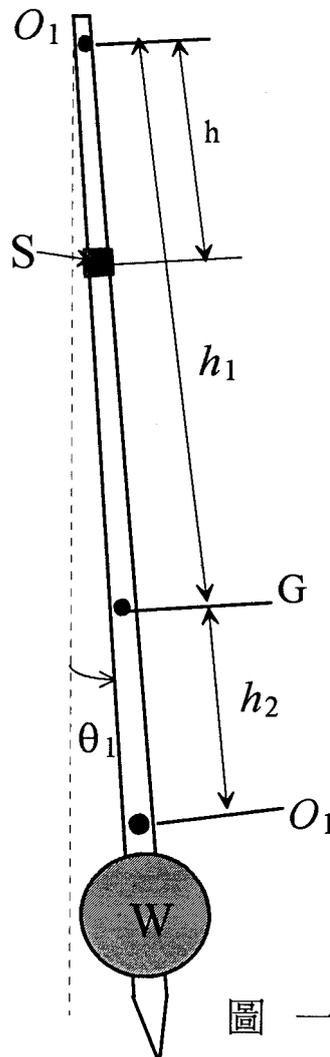
瞭解複擺的特性，並利用複擺，測量重力加速度。

### 二、原理與方法：

一般所謂的單擺(simple pendulum)，是指擺的質量絕大部分分布於擺錘上。此時擺若做小角度擺動，其擺動週期  $T$  如下式所示：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

其中  $L$  為擺長， $g$  為重力加速度。



若擺的質量不是集中於擺錘，則此種擺為複擺(complex pendulum)。克特複擺(Kater pendulum)的示意圖如圖一所示，其中  $O_1$  及  $O_2$  為克特複擺的懸掛點， $G$  為重心，(注意  $G$  的位置隨滑走體位置而改變)， $S$  為滑走體， $W$  為重錘。我們令  $G$  至  $O_1$  的距離為  $h_1$ ， $G$  到  $O_2$  距離為  $h_2$ 。若以  $O_1$  為懸掛點，複擺的重力對  $O_1$  點有一力矩  $\tau_1$

$$\tau_1 = I_1 \alpha_1 \quad (1)$$

其中  $I_1$  為複擺的轉動慣量(以  $O_1$  為轉軸)， $\alpha_1 = \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$  即為角加速度

由力矩的定義，結合 $\theta_1$ 符合小角度擺動的情形下，可得式(2)

$$\tau_1 = -Mgh_1 \sin \theta_1 \cong -Mgh_1 \theta_1 \quad (2)$$

由式(1)與式(2)式可得複擺的擺動方程式

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \frac{Mgh_1}{I_1} \theta_1 = 0 \quad (3)$$

式(3)的解 $\theta_1(t)$ 為餘弦函數

$$\theta_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{Mgh_1}{I_1}} t + \delta_1\right) \quad (4)$$

其中 $A_1$ 、 $\delta_1$ 均為常數，是由擺動的起始狀態來決定。所以複擺擺動週期 $T_1$ 為

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{Mgh_1}} \quad (5)$$

利用式(5)可求得重力加速度 $g$ ，但需先求出 $I_1$ 的大小。由平行軸定理(parallel-axis theorem)知 $I_1 = I_{cg} + Mh_1^2$ ，其中 $I_{cg}$ 為以重心 $G$ 為轉軸時，複擺的轉動慣量。代入式(5)可得

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cg} + Mh_1^2}{Mgh_1}} \quad (6)$$

同理，若以 $O_2$ 為懸掛點，則複擺擺動週期為

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cg} + Mh_2^2}{Mgh_2}} \quad (7)$$

由式(6)與式(7)二式消去 $I_{cg}$

$$Mgh_1 T_1^2 = 4\pi(I_{cg} + Mh_1^2) \quad (6)$$

$$Mgh_2 T_2^2 = 4\pi(I_{cg} + Mh_2^2) \quad (7)$$

$$g(h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2) = 4\pi^2(h_1^2 - h_2^2)$$

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2}{h_1^2 - h_2^2} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(h_1 + h_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2(h_1 + h_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)}} \quad (8)$$

因此若分別測得以 $O_1$ 及 $O_2$ 為懸掛點的擺動週期 $T_1$ 及與 $T_2$ ，以及 $h_1$ 與 $h_2$ ，代入式(8)，即可求得重力加速度 $g$ 。

假若 $T_1 = T_2 = T_0$ ，則式(8)，可簡化為

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2} \quad (9)$$

其中 $L = h_1 + h_2$

### 三、儀器設備：

克特複擺、T形座、光電計數計時器。

### 四、實驗步驟：

#### 方法（一）

1. 將複擺放在 T 形座上，找出重心位置  $G$ ，量得  $h_1$  與  $h_2$ 。
2. 以  $O_1$  為懸掛點懸在支架上，使其自由擺動 20 次，但擺幅不可超過  $5^\circ$ ，記錄擺動 20 次的時間。
3. 接著以  $O_2$  為懸掛點，重複步驟 2。
4. 利用式(8)，算出  $g$  值。
5. 移動複擺上的滑走體，改變重心位置，再重覆步驟 1 至步驟 4。
6. 計算  $g$  之平均值。

#### 方法（二）

1. 量  $O_1$  至  $O_2$  之距離  $L$ 。
2. 先以  $O_1$  為懸掛點，測出其周期  $T_1$  及滑走體至  $O_1$  之距離  $h$ 。
3. 改變滑走體位置，重覆步驟 2 多次，在方格紙上以周期為縱軸， $h$  為橫軸，標示所得之數據點，並連成一平滑曲線，如圖二所示。
4. 再以  $O_2$  為懸掛點，重覆步驟 2 及步驟 3，測出其周期  $T_2$ ，同樣以周期為縱軸， $h$  為橫軸，標示所得之數據點，並連成一平滑曲線，如圖二所示。
5. 找出兩條曲線之交點所對應的周期，即  $T_0$ ，帶入式(9)，即可計算出重力加速度  $g$ 。

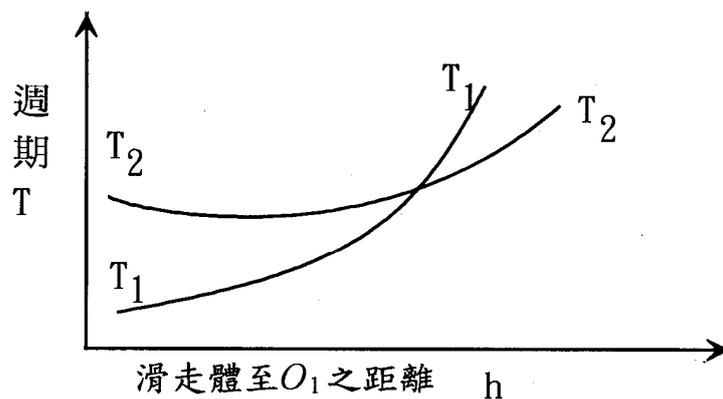


圖 二

### 五、問題與討論：

1. 比較本實驗兩方法何者較準確？其與  $g$  的公認值誤差又有多少？
2. 對任意形狀之物體，如何量出以質心為轉動軸的轉動慣量  $I_{cg}$ ？

物理實驗記錄表格  
實驗六、複擺實驗

實驗時間：        年        月        日        姓名：\_\_\_\_\_

方法(一)

項次	$h_1$	$h_2$	$T_1$		$T_2$		重力加速度 $g$
			擺動 20 次 時間	周期	擺動 20 次 時間	周期	
1							
2							
3							

方法(二)  $O_1$  至  $O_2$  之距離  $L =$  \_\_\_\_\_ cm

項次	滑走體至 $O_1$ 之距 離 $h$	$T_1$		$T_2$	
		擺動 20 次時間	周期	擺動 20 次時間	周期
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

重力加速度  $g =$  \_\_\_\_\_  $m/s^2$