實驗七　扭擺實驗

一、目的：

利用扭擺的擺動週期，測量金屬線之扭轉常數及剛性係數

二、原理與方法：

任何彈性體，在彈性限度內，其應力(stress)F 與應變(strain)X 成正比，即「虎克定律(Hooke's law)」，

$$\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{X} \tag{1}$$

其中 k 為力常數(force constant)，隨物體的性質而異。對剛體而言，切應力與切應變亦成正比，如圖一所示。

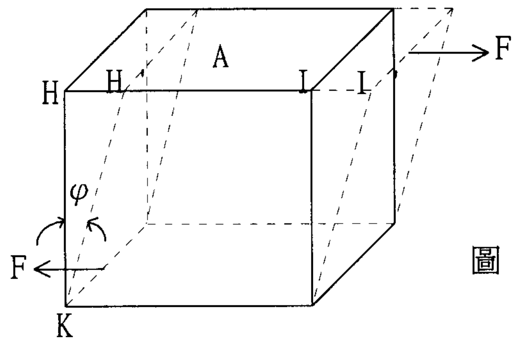

圖　一

一個立方體受一水平力 F 而產生形變，假定底面固定，則其每一層的位移與到底層的距離成正比，是為側向應變，亦稱為切應變。假設圖一頂面的 H、I 兩點移至 H'、I'兩點，KH 與 KH'間之夾角φ很小，受力面大小為 A（注意：此面是與 F 相切），則

$$切應力 = \frac{F}{A}$$

$$切應變 = \frac{HH'}{HK} = \tan\varphi \simeq \varphi$$

所以根據剛體剛性係數 n 的定義得知

$$n = \frac{切應力}{切應變} = \frac{\frac{F}{A}}{\varphi} \tag{1}$$

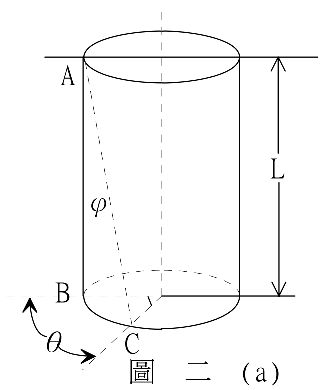

圖　二　(a)

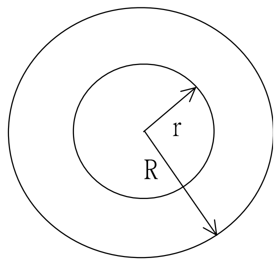

圖　二　(B)

如圖(二)所示，一金屬桿其長為 L，半徑 R，上端固定，下方繫一圓盤，將其扭轉θ角轉動，使得原來 AB 垂直線扭轉成 AC。AB 與 AC 所夾之角為φ，BC 所張的角為θ，則 $L\varphi=$ 弧長 BC $= R\theta$。因為對稱，所以施力與形變在 r 至 $r+\mathrm{d}r$ 的圓環上應均勻一致。（參考圖二(b)）

若圓環面積 $dA \cong 2\pi rdr$，且受力為 dF，則由式(1)可得

$$n=\frac{dF/dA}{\varphi}\cong\frac{dF}{2\pi rdr}\cdot\frac{1}{\varphi}$$

所以 $dF \cong 2\pi n\varphi rdr$，而此力 dF 對圓心 O 造成之力矩為 $d\tau$，總力矩τ則為

$$\tau=\int d\tau=\int rdF$$

於是 $\tau=\int_0^R 2\pi n\varphi r^2dr=\int_0^R 2\pi n\frac{r\theta}{L}r^2dr=\frac{n\pi\theta}{2L}R^4$ ，（ $\varphi=\frac{r\theta}{L}$ ），求得剛性係數 n 為

$$n=\frac{2L\tau}{\pi\theta R^4} \tag{2}$$

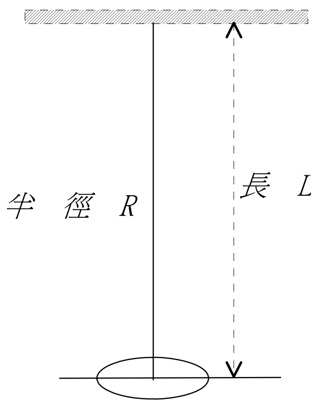

圖　三

如圖三所示，一圓盤以金屬線懸掛於支架上，將圓盤轉動一角度（小於 5°）後放開，由於金屬桿之回復力矩，使圓盤往復扭動，當扭動角度很小時，回復力矩τ與扭轉角度θ成正比，但方向相反，形成一簡諧運動。所以

$$\tau=-\kappa\theta,\ \kappa\text{為扭轉常數} \tag{3}$$

$$\tau=I\alpha=I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

其中α為角加速度，I 為扭擺之轉動慣量，所以運動方程式為

$$-k\theta=I\frac{d^2\theta}{dt^2}\ \Rightarrow\ \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\kappa}{I}\theta=0$$

所以 $\theta(t)=A\cos(\omega t+\delta)=A\cos(\sqrt{\frac{\kappa}{I}}t+\delta)$ ，其中 A、δ均為常數。則可求得扭轉常數κ

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\kappa}{I}}\ \Rightarrow\ \kappa=\frac{4\pi^2 I}{T^2} \tag{4}$$

先將式(3)代入式(2)得

$$n = \frac{2L\kappa}{\pi R^4} \tag{5}$$

再將式(4)代入式(5)得

$$n = \frac{2L}{\pi R^4} \cdot \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{8\pi LI}{T^2 R^4} \tag{6}$$

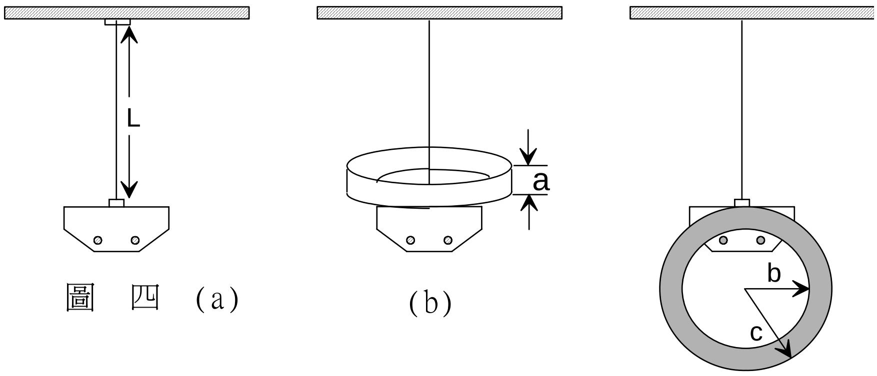

圖 四 (a) (b) (c)

如圖四(a)所示，有一鋼線懸掛一重 W 的中空扭轉盤，其轉動慣量為 I_0，其上放置金屬環的方式有二，如圖四(b)、圖四(c)所示，而其轉動慣量分別為 I_1 及 I_2。由式(4)得知

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{k}(I_0 + I_1) \tag{7}$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{k}(I_0 + I_2) \tag{8}$$

式(7)減式(8)得

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa}\left(I_1 - I_2\right) \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{4\pi^2\left(I_1 - I_2\right)}{T_1^2 - T_2^2} \tag{9}$$

將式(9)求得之κ代入式(5)

$$n = \frac{2L}{\pi R^4}\left(4\pi^2 \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2}\right) = \frac{8\pi L\left(I_1 - I_2\right)}{R^4\left(T_1^2 - T_2^2\right)} \tag{10}$$

其中

$$I_1 = M\left(\frac{b^2 + c^2}{2}\right), \qquad I_2 = M\left(\frac{b^2 + c^2}{4} + \frac{a^2}{12}\right)$$

三、儀器設備：

扭擺圓環、扭擺座、鋼線、銅線、尺、光電計時器、游標尺、螺旋測微器。

四、實驗步驟：

1. 將金屬線兩端夾緊，固定在支架與座上。
2. 分別測量金屬圓環的重量、厚度、內半徑及外半徑，計算其轉動慣量 I_1 及 I_2。

3. 測量鋼線的長度 L，並以螺旋測微器量鋼線的半徑 R。

4. 將金屬圓環水平放置在座上，輕輕扭轉，角度請小於 5°，放開後測量其擺動周期 T_1（擺動 50 次）。

5. 將金屬圓環改為垂直放置，輕輕扭轉，角度請小於 5°，測量擺動周期 T_2（擺動 50 次）。

6. 計算此金屬線之剛性係數。

剛性係數標準值

鑄鐵：　3.5×10^{10} N/m^2 ～ 5.3×10^{10} N/m^2
鍛鐵：　7.7×10^{10} N/m^2 ～ 8.3×10^{10} N/m^2
鋼鐵：　7.9×10^{10} N/m^2 ～ 8.9×10^{10} N/m^2
銅：　3.9×10^{10} N/m^2 ～ 4.6×10^{10} N/m^2
黃銅：　3.5×10^{10} N/m^2
鋁：　2.67×10^{10} N/m^2
鉛：0.562×10^{10} N/m^2

五、問題與討論：

1. 計算實驗值與公認值之誤差。

2. 扭擺週期會因角位移的大小而變化嗎？扭轉角度太大時，會有什麼影響？（請實際測試看看）

3. 如圓環厚度極小，水平放置與垂直放置的轉動慣量有何關係？

物理實驗記錄表格
實驗七、扭擺實驗

實驗時間：　　　年　　　月　　　日　　　姓名：__________________

圓環質量：M = 3.2 kg　　　　圓環厚度 a = __________ cm

圓環內徑 b = __________ cm　　　　鋼線長度 L = __________ cm

圓環外徑 c = __________ cm　　　　鋼線半徑 R = __________ cm

編號	圓環水平放置		圓環垂直放置	
	擺動 20 次時間	周期 T_1	擺動 20 次時間	周期 T_2
1				
2				
3				
4				
5				
平均				

水平轉動慣量 I_1 = ______________ kg·m^2

垂直轉動慣量 I_2 = ______________ kg·m^2

剛性係數 n = ______________ N/m^2

百分誤差 ______________ %